SESSION 2009

SECOND CONCOURS

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

PHYSIQUE - MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, sans imprimante et sans document d'accompagnement est autorisé.
Une seule calculatrice à la fois est admise sur la table. Aucun échange n'est permis entre les candidats.

Ce sujet aborde le phénomène de résonance sous divers aspects. Dans une première partie, nous présentons le modèle de l'électron élastiquement lié et montrons que l'interaction d'un atome et d'une onde électromagnétique peut se décrire par un phénomène de résonance. Un parallèle avec un circuit électronique résonant est effectué dans la deuxième partie. Nous étudions ensuite les phénomènes de résonance pour deux oscillateurs couplés en régime d'oscillations libres (partie III) et forcées (partie IV). Les 4 parties sont largement indépendantes.

Pour simplifier l'écriture des équations, nous adopterons les notations suivantes tout au long de l'épreuve : $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ et $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

On rappelle aussi que la pulsation ω d'un phénomène vibratoire est reliée à la fréquence f par la relation $\omega = 2\pi f$.

– Introduction

De nombreux systèmes physiques, lorsqu'ils sont écartés de leur position d'équilibre, retournent naturellement à leur état de repos en oscillant à une certaine fréquence, dite fréquence de relaxation ou fréquence propre. Lorsque par ailleurs on excite ces systèmes à une fréquence égale à cette fréquence propre, ils répondent à cette excitation avec une forte amplitude : c'est le phénomène de résonance.

1. Quels exemples de résonance connaissez-vous ?
2. On s'intéresse souvent en sciences à la réponse fréquentielle d'un système, c'est à dire à la réponse en amplitude du système en fonction de la fréquence de l'excitation à laquelle il est soumis. Donner l'allure d'une telle courbe amplitude = f(fréquence d'excitation) pour un système ayant une fréquence propre f_0. Cette courbe est appelée courbe de résonance.

I – Le modèle atomique de Lorentz

Vers 1900, H. A. Lorentz a proposé un modèle pour l'interaction d'une onde électromagnétique avec un atome à partir d'une hypothèse très simple. Chaque électron a une position d'équilibre. Sous l'action d'une onde électromagnétique, il subit une force qui l'écarte de sa position d'équilibre, vers laquelle une force de rappel tend à le ramener.

On appelle m la masse de l'électron ($m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg), e sa charge ($e = -1.6 \times 10^{-19}$ C). La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3.0 \times 10^8$ m/s. On néglige le poids de l'électron devant les autres forces.

- On suppose que le problème est unidimensionnel selon la direction (Ox), dont le vecteur unitaire est noté $\vec{e_x}$. Au repos, l'électron est repéré par la position $x = 0$. On note $x(t)$ l'écart algébrique de la position de l'électron par rapport à la position d'équilibre.

- La force de Lorentz subie par l'électron est $e\vec{E}(t)$, où $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\vec{e_x}$ est le champ électrique de l'onde électromagnétique. ω est sa pulsation, E_0 son amplitude (on choisit $E_0 < 0$).
- La force de rappel est prise de la forme $-m\omega_0^2 x(t)\vec{e_x}$, ω_0 est une constante.
- On suppose enfin que l'atome subit une troisième force de type dissipatif, de la forme $-2\beta m\dot{x}(t)\vec{e_x}$ ($\beta > 0$).

1. Représenter les différentes forces qui s'appliquent à l'électron à un instant donné. Préciser la direction de son vecteur vitesse.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron et montrer qu'il conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{eE_0}{m}\cos(\omega t). \tag{1}$$

3. On cherche une solution de cette équation différentielle sous la forme $x(t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t)$. En remplaçant cette expression dans l'équation précédente, donner les expressions de $A(\omega)$ et $B(\omega)$. Pour ce faire, on pourra utiliser la propriété suivante :
   Si $f(\omega)\cos(\omega t) = g(\omega)\sin(\omega t)$ quel que soit t, alors $f(\omega) = g(\omega) = 0$.
4. On admettra que lorsque ω est proche de ω_0, les expressions obtenues précédemment peuvent être approchées par :

$$A(\omega) = \frac{eE_0}{2m\omega_0}\frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} \tag{2}$$

$$B(\omega) = \frac{eE_0}{2m\omega_0}\frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}. \tag{3}$$

   Représenter l'allure de $A(\omega)$ et $B(\omega)$. Montrer que $B(\omega)$ admet un maximum en ω_0.
5. La terme $B(\omega)$ caractérise l'absorption de l'onde lumineuse par l'atome. La fonction $B(\omega)$ est donc la courbe de résonance d'absorption.
   (a) Calculer $B(\omega_0)$.
   (b) On cherche à déterminer la largeur à mi-hauteur de cette courbe de résonance. Déterminer les expressions de ω' et ω'', les pulsations telles que : $B(\omega') = B(\omega'') = B(\omega_0)/2$.
   (c) En déduire l'expression de Q le facteur de qualité de la résonance, défini par $Q = \omega_0/|\omega' - \omega''|$.
   (d) Quel est l'unité de Q ? Quel paramètre de la forme de la courbe de résonance Q caractérise-t-il ?
   (e) Application numérique : on considère une transition de l'atome de sodium à la longueur d'onde de 590 nm. Calculer ω_0, la pulsation correspondant à cette longueur d'onde. Sachant que la largeur à mi-hauteur de la résonance est de $2\pi \times 10^7$ rad/s, calculer le facteur de qualité de l'"oscillateur atomique".
   (f) Le fait que la courbe d'absorption de l'atome soit une fonction assez "piquée" est-il cohérent avec ce que vous savez de l'absorption/émission d'un atome ?

II – Circuits électroniques résonants

Dans cette partie on s'intéresse au facteur de qualité de dispositifs électroniques usuels. Dans un premier temps, on considère le circuit RLC représenté sur la figure 1. Ce circuit est alimenté par un générateur basses fréquences, délivrant une tension sinusoïdale à la fréquence f, de la forme $U(t) = U_0 \cos(2\pi f t)$.

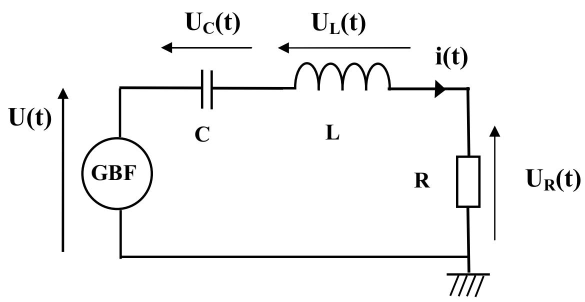

FIGURE 1 – Circuit RLC.

1. On désire visualiser la résonance en courant du circuit. On dispose pour cela d'un oscilloscope.
   (a) Représenter le branchement de l'oscilloscope permettant de visualiser le courant dans le circuit.
   (b) On appelle $U_C(t)$la tension aux bornes du condensateur, $U_L(t)$ la tension aux bornes de l'inductance et $U_R(t)$ la tension aux bornes de la résistance. $q(t)$ est la charge électrique qui circule dans le circuit par unité de temps et est donc reliée à l'intensité par $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.
      i. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$.
      ii. Mettre l'équation différentielle sous la forme de l'équation du I et exprimer ω_0 et β en fonction de R, L et C.

2. On réalise le montage expérimental et on mesure grâce à l'oscilloscope, les valeurs de l'intensité efficace I en fonction de la fréquence f du GBF. On obtient le tableau de valeurs suivant :

f(Hz)	100	120	130	140	150	160	170	180	190	200
I(mA)	9.5	12.9	15.2	18	20.8	25.4	31.4	38	45.4	51.6

f(Hz)	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
I(mA)	54.4	52	45.2	39.6	33.6	30	26	23.6	21	19.2

   (a) Tracer la courbe de résonance $f(I)$.
   (b) Déterminer graphiquement la valeur de la fréquence de résonance f_r du circuit. En déduire la valeur de la pulsation de résonance ω_r.
   (c) Sachant que $L = 0.10$ H et $C = 6.0$ μF, quelle est la valeur théorique de la pulsation propre ω_0 ? La comparer avec la valeur expérimentale de la pulsation de résonance.

(d) On cherche à présent à déterminer le facteur de qualité du circuit. On définit la bande passante comme l'ensemble des fréquences pour lesquelles $I > I_0/\sqrt{2}$.

   i. Déterminer graphiquement la largeur Δf de la bande passante du circuit. En déduire le facteur de qualité $Q = f_r/\Delta f$.

   ii. La valeur théorique de Q est donnée par $Q = L\omega_0/R$. En déduire la valeur de la résistance utilisée.

   iii. Que doit-on faire pour augmenter le facteur de qualité, sans modifier la fréquence de résonance ?

3. On cherche maintenant à déterminer l'ordre de grandeur des facteurs de qualité des récepteurs radio usuels. On modélise le récepteur radio par un circuit résonant, dont la fréquence propre est ajustable à l'aide d'un condensateur variable : la réception est bonne lorsque la fréquence propre du circuit est égale à la fréquence d'émission de la station de radio que l'on veut écouter. La gamme de fréquence des ondes moyennes (MW) est située entre 500 et 1600 kHz ; celle des ondes longues (LW) entre 150 et 300 kHz. On suppose que ces bandes offrent chacune dix stations et on admet pour simplifier que les fréquences d'émission de ces stations sont équidistantes.

   (a) Justifier les appellations "ondes moyennes" et "ondes longues". A quelles gammes de longueur d'onde correspondent-t-elles ?

   (b) Montrer que la largeur de la bande passante du récepteur doit être inférieure à une certaine valeur, que l'on précisera pour chacun des cas.

   (c) Donner les valeurs minimales du facteur de qualité pour les récepteurs MW et LW.

   (d) Mêmes questions pour les récepteurs FM, qui permettent de recevoir une cinquantaine de stations entre 88 et 108 MHz.

4. Comparer le facteur de qualité obtenu dans le cadre de l'atome de Lorentz avec le facteur de qualité du montage expérimental, et avec les facteurs de qualité de récepteurs radio usuels. L'atome vous paraît-il être un "bon" résonateur ? Connaissez-vous des applications reposant sur la précision des transitions atomiques ?

III – Système de deux oscillateurs couplés : oscillations libres

On considère deux oscillateurs O_1 et O_2, constitués chacun d'un ressort de raideurs respectives k_1 et k_2, et d'une masse, M_1 et M_2 respectivement. O_1 et O_2 sont couplés par un troisième ressort, de raideur κ. Le dispositif est réalisé de telle façon qu'au repos, la position des masses M_1 et M_2 reliées par le ressort de couplage soit identique à celle qu'elles occupent en l'absence de ressort de couplage : en d'autres termes, au repos, les trois ressorts ne sont pas contraints.

Les conventions concernant la position des masses sont données dans la figure 2.

Lorsque les masses sont mises en mouvement, leurs positions sont repérées respectivement par les valeurs algébriques $x_1(t)$ et $x_2(t)$, les écarts aux positions au repos.

1. Ecrire la projection sur l'axe x du principe fondamental de la dynamique pour chacune des masses M_1 et M_2.

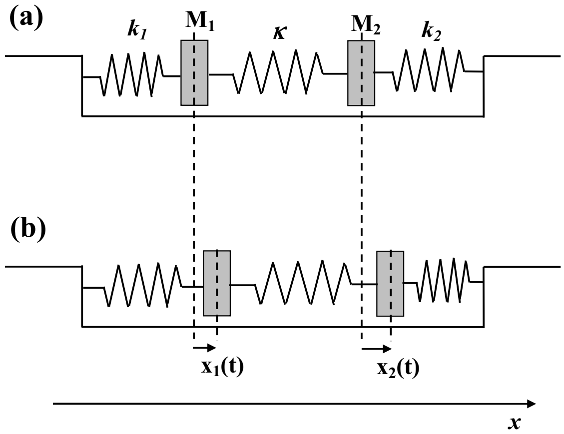

FIGURE 2 – Système de deux oscillateurs couplés. (a) : les masses M_1 et M_2 sont au repos. (b) : Mises en mouvement, elles sont repérées par $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

2. Montrer que le système d'équations précédent peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) &= \tfrac{\kappa}{M_1} x_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) &= \tfrac{\kappa}{M_2} x_1(t). \end{aligned}\right.$$

   Préciser les expressions de ω_1 et ω_2.

3. On cherche des solutions sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} x_1(t) &= X_1(\omega)\cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2(t) &= X_2(\omega)\cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned}\right.$$

   où $-\pi/2 < (\phi_1, \phi_2) \leq \pi/2$. Justifier que $\phi_1 = \phi_2$ et donner le système d'équations vérifiées par $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$.

4. Montrer que ce système admet une solution non-triviale à condition que ω^2 soit solution d'une équation du type $F(\omega^2) = \frac{\kappa^2}{M_1 M_2}$, où la fonction $z \mapsto F(z)$ est un polynôme du second degré de la forme $(z_1 - z)(z_2 - z)$. Déterminer $F(z)$ en fonction des paramètres du problème. Les solutions de cette équation sont notées ω' et ω'' et sont appelées pulsations propres du système.

5. (a) En représentant la fonction $F(\omega^2)$, donner une interprétation graphique des valeurs des pulsations propres. Comparer les valeurs des pulsations propres avec ω_1 et ω_2. On suppose $\omega_1 < \omega_2$.
   (b) Quelles sont les valeurs de ω qui annulent $F(\omega^2)$? A quelle situation physique correspondent ces modes d'oscillation ?
   (c) Comparer les signes relatifs de $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$ en fonction de la pulsation d'oscillation. Décrire qualitativement les mouvements relatifs des deux masses M_1 et M_2.

6. On s'intéresse maintenant au cas particulier où les deux oscillateurs sont identiques, c'est à dire $M_1 = M_2$ et $k_1 = k_2$.
   (a) Que peut-on dire de ω_1 et ω_2 ?
   (b) Donner la représentation graphique permettant de déterminer les pulsations propres du système.

(c) Montrer que dans ce cas, les amplitudes des positions des masses satisfont à la condition $[X_1(\omega)]^2 = [X_2(\omega)]^2$.

(d) En déduire que le système présente deux modes propres d'oscillation, l'un "parallèle" et l'autre "symétrique". Calculer ω_p et ω_s, les pulsations propres respectives de ces modes.

(e) Justifier physiquement que la pulsation propre du mode "parallèle" est indépendante de κ la raideur du ressort de couplage.

(f) Donner une représentation graphique du mouvement relatif de M_1 et M_2 pour chacun des deux modes.

IV – Système de deux oscillateurs couplés : oscillations forcées

On considère à nouveau le système d'oscillateurs couplés de la partie III. On applique à présent à la masse M_1 une force harmonique $F(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$ où ω_f est appelée pulsation de forçage ($F_0 > 0$). On étudie la réponse fréquentielle du système, c'est à dire l'amplitude des oscillations de M_1 et M_2 en fonction de ω_f.

1. Montrer que l'application du principe fondamental de la dynamique aux deux masses M_1 et M_2 conduit au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) = \frac{\kappa}{M_1} x_2(t) + \frac{F(t)}{M_1} \\ \ddot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) = \frac{\kappa}{M_2} x_1(t). \end{cases}$$

2. On cherche des solutions sous la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1(\omega_f) \cos(\omega_f t) \\ x_2(t) = X_2(\omega_f) \cos(\omega_f t). \end{cases}$$

(a) Ecrire puis résoudre le système d'équations vérifiées par $X_1(\omega_f)$ et $X_2(\omega_f)$.

(b) Montrer que les solutions obtenues divergent lorsque la pulsation de forçage est égale à ω' et ω'', les pulsations propres du système des deux oscillateurs couplés de la partie précédente.

(c) Interpréter physiquement cette divergence. En pratique, pour un système réel, quel phénomène serait de nature à empêcher cette divergence ?

3. On procède à présent à l'étude des variations de $X_1(\omega_f)$ et $X_2(\omega_f)$. Déduire de la question III 4 que le dénominateur des fonctions $X_1(\omega_f)$ et $X_2(\omega_f)$ peut se mettre sous la forme du produit : $(\omega_f^2 - \omega'^2)(\omega_f^2 - \omega''^2)$. Porter dans un tableau le signe de $X_1(\omega_f)$ et $X_2(\omega_f)$ en fonction de la valeur de ω_f^2. On supposera que $\omega' < \omega''$ et $\omega_1 < \omega_2$.

4. Tracer l'allure de X_1 et X_2 en fonction de ω_f^2.

5. Physiquement, que se passe-t-il lorsque $\omega_f = \omega_2$? D'une manière générale, voyez-vous des situations où le phénomène de résonance est gênant ? Par rapport à ces situations, quelles peuvent être les applications de ce type de dispositifs à oscillateurs couplés ?