

SESSION 2012

SECOND CONCOURS  
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

## PHYSIQUE - MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

L'usage des calculatrices de poche à alimentation autonome, sans imprimante et sans document d'accompagnement est autorisé. Une seule calculatrice à la fois est admise sur la table. Aucun échange n'est permis entre les candidats.

Si vous repérez une erreur dans l'énoncé, le signaler dans votre copie.

L'énoncé comporte 9 pages.

Les trois parties sont totalement indépendantes. Les sous-parties sont largement indépendantes.

## Partie I : la loupe, un outil pour le dermatologue

Lorsqu'on va chez un dermatologue, un des premiers outils qu'il utilise est la loupe. Les loupes sont généralement faites en verre spécial dont il faut connaître les propriétés pour réaliser des loupes aux propriétés contrôlées.

### I-A – Caractérisation du verre

#### I-A-1 Coefficient de frottement

On se propose de mesurer le coefficient de frottement du verre sur le verre, note  $\mu$ . Pour cela, on dispose d'une grande vitre plane et d'un petit morceau de verre en forme de parallélépipède et de masse  $m$ . On pose le petit morceau de verre sur la vitre initialement horizontale et on incline doucement la vitre continuellement.

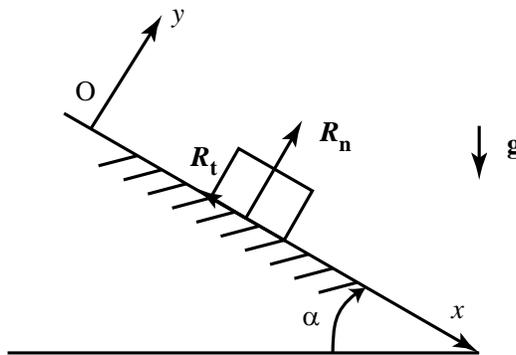


Figure 1 : Mesure du coefficient de frottements.

On notera  $\alpha$  l'angle que fait la vitre avec l'horizontale au cours du temps.

Du fait des frottements entre les deux surfaces de verre, la réaction de la plaque de verre par rapport au plan incliné n'est plus nécessairement perpendiculaire à la plaque et peut être décomposé en deux termes  $R_t$  et  $R_n$ , respectivement les composantes tangentielle et normales de la réaction de la plaque. Le coefficient de friction  $\mu$  est défini comme suit : tant que le morceau de verre ne glisse pas sur la vitre, la norme de la composante tangentielle de la réaction du support est inférieure à  $\mu$  fois la norme de la composante normale de la réaction :  $\|\vec{R}_t\| \leq \mu \|\vec{R}_n\|$ .

**I-A-1-a** En supposant que le petit morceau de verre soit immobile, exprimer les composantes normales et tangentielles de la réaction en fonction de la masse  $m$  du petit morceau de verre, de l'accélération de la pesanteur  $g$  et de l'angle  $\alpha$ .

**I-A-1-b** En déduire une condition sur l'angle  $\alpha$  pour que le petit morceau de verre ne glisse pas.

**I-A-1-c** Expérimentalement, on remarque que pour  $\alpha > 38^\circ$ , le petit morceau se met à glisser. En déduire la valeur de  $\mu$ .

#### I-A-2 Module élastique du verre

Le verre est un matériau très dur, on peut toutefois le déformer légèrement sans le casser. C'est ce qu'on appelle l'élasticité. L'élasticité d'un matériau se détermine à partir d'un coefficient noté  $E$ , appelé le module de Young dont il est très important d'être capable de donner une valeur quand on cherche à fabriquer des loupes de bonne qualité. Le module de Young est une grandeur physique homogène à une pression. Pour mesurer ce module de Young, on va mesurer la déformation d'une plaque de verre d'épaisseur  $e$ , de largeur  $l$  et de longueur  $L$  sous l'effet d'un poids.

La masse volumique du verre est  $\rho = 2,5 \text{ g.cm}^{-3}$ .

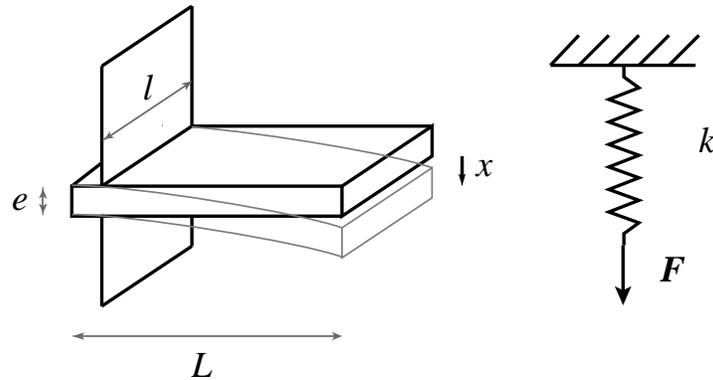


Figure 2 : Module élastique d'une lame de verre.

La lame de verre est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la lame est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale  $F$  (on supposera que la force  $F$  reste verticale tout le long de l'expérience) à l'extrémité de la plaque, celle-ci est déformée. L'extrémité de la plaque se déplace d'une quantité  $x$  appelée flèche.

La flèche est donnée par une relation de la forme :

$$x = 12 \frac{FL^3}{E l e^3}$$

Ceci est valable si on néglige la petite longueur d'encastrement de la plaque.

**I-A-2-a** En considérant uniquement la force  $F$ , montrer que l'on peut modéliser la plaque de verre par un ressort de raideur  $k$  dont on déterminera l'expression analytique en fonction de  $E$ ,  $e$ ,  $L$  et  $l$ .

**I-A-2-b** Calculer numériquement  $k$  pour une plaque de longueur  $L = 2 \text{ cm}$ , d'épaisseur  $e = 500 \text{ }\mu\text{m}$  et de largeur  $l = 10 \text{ mm}$  dans le cas d'un verre de module de Young  $E = 50 \text{ GPa}$ .

**I-A-2-c** Comment évoluerait la raideur si  $L$  augmentait de 0.2 % et  $e$  diminuait de 0.5 % ?

**I-A-2-d** En mettant à l'extrémité de la plaque une masse  $m = 1 \text{ g}$ , on mesure une flèche  $x = 13 \text{ }\mu\text{m}$ . En déduire le module de Young du verre utilisé pour les loupes. Par la suite, on prendra comme valeur de l'accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

**I-A-2-e** Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de longueur à vide nulle, de constante de raideur  $k$ , lorsqu'il est étiré d'une longueur  $x$ . En reprenant l'analogie du ressort, quelle est alors l'énergie élastique emmagasinée dans la plaque lorsque la flèche de déformation vaut  $x$ . Exprimer ceci en fonction de  $x$ , de  $E$ ,  $e$ ,  $L$  et  $l$ .

Cette dernière mesure n'étant pas forcément facile à faire, il est aussi possible de déterminer le module de Young de la plaque en la faisant vibrer. On cherche à trouver les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence de vibration de la plaque de verre. On admet que lors des vibrations de la plaque de verre, l'énergie cinétique de la plaque est donnée par l'expression :

$$E_c = \rho e L l \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

**I-A-2-f** Ecrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.

**I-A-2-g** En supposant que l'énergie mécanique de la fibre se conserve au cours du temps, montrer qu'il est possible d'écrire l'équation différentielle vérifiée par l'extrémité de la fibre par une équation de la forme :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Déterminer l'expression de  $\omega$  appelée pulsation propre de la plaque. Faire l'application numérique pour la plaque de verre de la question I-a-2-b.

**I-A-2-h** En fait, l'énergie mécanique liée à la vibration de la poutre n'est pas conservé au cours du temps à cause des frottements de la plaque sur l'air. On peut montrer que la puissance dissipée lors de la friction sur l'air est de la forme

$$\frac{dE_M}{dt} = -\lambda \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

Etablir la nouvelle forme de l'équation différentielle vérifiée par  $x(t)$ .

### I-A-3 Indice optique du verre

En fait, la propriété essentielle d'une loupe est fixée par la géométrie de la loupe et par son indice optique.

**I-A-3-a** Rappeler la définition de l'indice optique d'un matériau. Donner l'indice optique de quelques matériaux usuels. Vous préciserez les notations utilisées.

Un diaphragme est percé de deux fentes fines parallèles,  $F_1$ ,  $F_2$  séparées par une distance  $a$ . Le diaphragme est éclairé en lumière monochromatique émise par un laser Hélium-Néon ( $\lambda = 520$  nm), parallèle, sous incidence normale. On observe l'éclairement sur un écran  $E$  parallèle au diaphragme et situé à la distance  $D = 1$  m de ce dernier. On a  $a = 0,5$  cm.

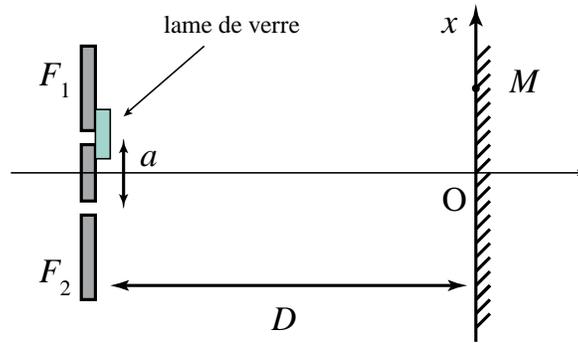


Figure 3 : Dispositif interférométrique de mesure d'indice.

**I-A-3-b** Qu'observe-t-on sur l'écran ? Justifier votre réponse.

**I-A-3-c** Quelle est la différence de chemin optique  $\delta = F_2M - F_1M$  (différence de marche entre les rayons venant des fentes  $F_1$  et  $F_2$  au point  $M$  d'abscisse  $x_M$  sur l'écran ? En faisant un développement limité au premier ordre non nul dans le cas  $D \gg a$  et  $D \gg x_M$  obtenir une expression simplifiée de  $\delta$ .

**I-A-3-d** Calculer l'interfrange du système de franges observé sur l'écran  $E$ .

**I-A-3-e** On place devant la fente 2, la lame de verre précédente d'épaisseur  $e = 10 \mu\text{m}$  et d'indice  $n$ . Quelle est la nouvelle expression de la différence de marche entre les deux rayons au point  $M$  ?

**I-A-3-f** Quelle est la nouvelle position de la frange centrale en présence de la lame de verre ? On constate que la nouvelle position de la frange centrale est désormais en  $|x| = 1 \text{ mm}$ . Quel est l'indice optique du verre utilisé ?

### I-B – Etude de la loupe

On appelle distance de vision distincte d'un œil la distance  $d$  qui sépare un objet dont l'image sur la rétine est nette du centre optique  $C$  de cet œil qu'on assimilera à une lentille mince. Grâce à la propriété d'accommodation du cristallin,  $d$  peut varier entre une distance maximale de vision distincte  $d_M$  et une distance minimale de vision distincte  $d_m$ .

**I-B-0** Pour un œil normal donner des valeurs typiques de  $d_M$  et  $d_m$ .

**I-B-1** Quel serait l'effet de la myopie ou de l'hypermétropie sur ces valeurs ?

Un dermatologue dont la vision est normale se sert d'une loupe constituée d'une lentille mince convergente (L) de centre optique  $O$  et de distance focale image  $f'$ . Il observe l'image virtuelle  $\overline{A'B'}$  que donne la loupe d'un objet réel  $\overline{AB}$ .

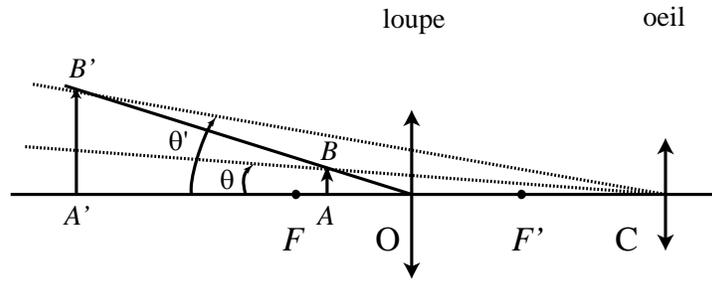


Figure 4 : Observation d'un objet à travers une loupe.

**I-B-2** Rappeler la relation de conjugaison des lentilles minces qui relie les grandeurs algébriques  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{OA}$  et la distance focale image  $f'$ .

**I-B-3** En s'aidant de considérations géométriques (figure 3) et de la relation de conjugaison des lentilles minces, exprimer le grandissement transversal  $G_t = \overline{A'B'}/\overline{AB}$  en fonction  $f'$  de  $d = \overline{A'C}$  et de la distance  $\delta = \overline{OC}$  qui sépare le centre optique O de la loupe (L) du centre optique de l'œil.

**I-B-4** Lorsque le dermatologue observe un objet  $\overline{AB}$  à travers la loupe, il voit son image sous l'angle  $\theta'$ . Lorsqu'il enlève sa loupe, sans changer la distance de l'objet à son œil, il voit cet objet sous un angle  $\theta$ . On définit le grossissement  $G$  de la loupe par le rapport  $G = \theta'/\theta$ . Exprimer  $G$  en fonction de  $f'$ ,  $\delta$  et  $d$ . On supposera les angles suffisamment petits pour que l'on puisse confondre le sinus et la tangente des angles avec leur valeur exprimée en radians.

**I-B-5** Quelle est, en fonction de  $f'$  et  $\delta$  la valeur du grossissement maximum ? Que vaut alors ce grossissement  $G_{\max}$  ?

**I-B-6** Le dermatologue maintient fixe la position de la loupe par rapport à son œil et, suivant la position de l'objet, il accommode de l'infini jusqu'à sa distance minimale de vision distance  $d_m$ . Exprimer la variation  $\Delta G = G(\infty) - G(d_m)$  du grossissement.

**I-B-7** Le centre optique de l'œil est placé à 20 cm du centre optique de la loupe. Quelle doit être la valeur  $f'_0$  de la distance focale de la loupe pour que le grossissement maximal vaille 10 ?

## Partie II : la dialyse, un outil indispensable

Considérons tout d'abord le dispositif représenté sur la figure 4. Les deux compartiments sont séparés par une membrane verticale poreuse qui contiennent la même solution moléculaire mais à des concentrations différentes  $c_1$  et  $c_2$  (avec  $c_1 > c_2$ ). Leurs deux volumes sont notés respectivement  $V_1$  et  $V_2$ .

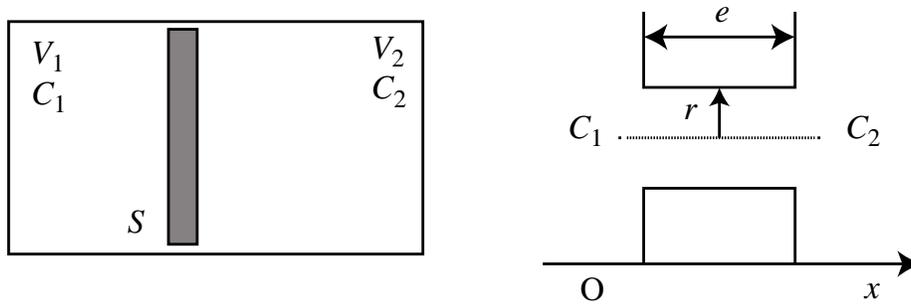


Figure 5 : schéma de principe d'un rein artificiel et d'un pore.

La membrane, de surface  $S$  et d'épaisseur  $e$ , comporte par unité de surface  $n$  pores assimilables à des canaux cylindriques d'axe horizontal normal à la membrane. Les pores sont supposés identiques, leur rayon est égal à  $r$ . Du fait de la différence de concentration entre les deux compartiments s'établit dans chaque pore un flux macroscopique de molécules, unidirectionnel suivant  $Ox$  qui tend à uniformiser la concentration dans l'ensemble. Le flux  $j_D$  de molécules (c'est-à-dire le nombre de molécules par unité de temps) par unité de surface  $s$  du pore est donné par la loi de Fick :

$$j_D = \frac{d^2N}{dt ds} = -D \frac{\partial c(x, t)}{\partial x}$$

$D$  étant le coefficient de diffusion des molécules. A l'instant  $t$ , les concentrations sont supposées homogènes dans les deux compartiments et sont notées  $c_1(t)$  et  $c_2(t)$ . On notera  $\Delta c(t) = c_1(t) - c_2(t)$ .

**II -1** En admettant que dans un pore la concentration soit une fonction affine de  $x$ , exprimer le flux  $j_D$  dans un pore en fonction de  $D$ ,  $\Delta c(t)$  et  $e$  et montrer que le flux  $j_M$  de molécules par unité de surface  $S$  de la membrane est donné par une expression de la forme :

$$j_M = P \Delta c(t)$$

On donnera  $P$ , appelée « perméabilité de la membrane » en fonction de  $n$ ,  $D$ ,  $e$  et  $r$ .

**II-2** Calculer numériquement  $r$  pour :  $P = 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$ ,  $n = 10^6 \text{ pores/cm}^2$ ,  $e = 10 \text{ }\mu\text{m}$  et  $D = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ .

**II-3. a** Faire le bilan des nombres  $dN_1$  (dans  $V_1$ ) et  $dN_2$  (dans  $V_2$ ) de molécules traversant la membrane entre les instants  $t$  et  $t + dt$  en fonction de  $j_M$ ,  $S$  et  $dt$ .

**b** En écrivant la conservation du nombre total de molécules entre les deux compartiments, écrire les variations  $dc_1(t)$  et  $dc_2(t)$  des concentrations dans les volumes  $V_1$  et  $V_2$  pendant  $dt$  dues à l'existence du flux  $j_M$  à travers la membrane.

**c** Etablir l'équation différentielle donnant  $\Delta c(t)$  en fonction de  $V_1$  et  $V_2$ ,  $P$  et  $S$ .

**II-4** Intégrer cette équation en la mettant sous la forme :

$$\Delta c(t) = \Delta c(0) e^{-t/\tau}$$

avec  $\Delta c(0) = c_1(0) - c_2(0)$  et  $\tau$  appelée « constante de dialyse » que l'on exprimera en fonction de  $V_1$  et  $V_2$ ,  $P$  et  $S$ .

On donne  $V_1 = 2$  l,  $V_2 = 1$  l et  $S = 2$  m<sup>2</sup>. Au bout de combien de temps la différence des concentrations est-elle égale au dixième de sa valeur initiale ?

**II-5** Dans le cas du dispositif d'hémodialyse, le volume  $V_1$  « à dialyser » est celui représenté par l'ensemble du volume liquidien d'un individu moyen, soit environ 50 l. Le volume  $V_2$  de liquide « normal » contre lequel s'effectue sa dialyse est aussi grand que le veut : on peut donc supposer  $V_2 \gg V_1$ . Quelle est alors l'expression simplifiée de  $\tau$  ? Calculer sa valeur à partir des valeurs numériques ci-dessus.

Quel sera alors le temps moyen d'une dialyse complète d'un individu si l'on veut diminuer d'un facteur 20 environ la concentration de molécules à éliminer.

### Partie III : la molécule de CO<sub>2</sub>

Le gaz carbonique intervient dans la physiologie car c'est un produit de la respiration avec l'eau. Le dosage de la quantité de dioxyde de carbone émit passe souvent par des techniques spectroscopiques dont l'objet est l'étude des vibrations des molécules. Pour étudier les vibrations de la molécule de CO<sub>2</sub>, nous supposons que chaque liaison C=O est indépendante de l'autre. Les atomes sont assimilés à des points matériels de masse  $m_1 = 2,66 \times 10^{-26}$  kg pour l'oxygène et  $m_2 = 1,99 \times 10^{-26}$  kg pour le carbone. L'atome de carbone interagit avec les atomes d'oxygène qui l'entourent. On néglige l'action de la pesanteur, les interactions entre les deux atomes d'oxygène extrêmes et on considère le système isolé formé par une seule molécule.

#### III-A Vibrations longitudinales de la molécule

Nous supposons dans cette partie que la molécule est linéaire : les trois atomes se déplacent suivant une direction unique repérée par le vecteur  $\vec{e}_x$ . Au voisinage de sa position d'équilibre, il est possible de modéliser l'interaction de l'atome central avec ses voisins par deux ressorts de longueurs au repos et de raideurs respectivement notés  $r_0$  et  $k$  (avec  $r_0 = 0,166$  nm et  $k = 1,42 \times 10^3$  N/m). A l'équilibre, les deux liaisons ont les mêmes longueurs et l'atome de carbone est confondu avec le centre d'inertie de la molécule). En dehors de l'équilibre, chaque atome est repéré par rapport à sa position d'équilibre  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  (voir figure 6).

On prendra comme référentiel, le référentiel lié au centre d'inertie de la molécule  $G$ .

III-A-1 Justifier que ce référentiel est galiléen. Rappeler ce que signifie le terme galiléen.

III-A-2 En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

- Justifier la relation  $m_1(x_1 + x_3) + m_2x_2 = 0$ .
- Montrer que  $x_1$  et  $x_3$  vérifient un système de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + ax_1 + bx_3 = 0 \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} + ax_3 + bx_1 = 0 \end{cases}$$

Et exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $k$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .

On cherche des solutions harmoniques du système. Dans ce cas, on peut associer aux grandeurs  $x_1(t)$  et  $x_3(t)$ , les valeurs complexes  $\underline{x}_1(t) = A_1 \exp(j\omega t)$ ,  $\underline{x}_2(t) = A_2 \exp(j\omega t)$  et  $\underline{x}_3(t) = A_3 \exp(j\omega t)$ . Les grandeurs  $A_i$  étant a priori complexes. Ici  $j^2 = -1$ .

- c) Déterminer les deux seules valeurs positives de  $\omega$  qui conduisent à des coefficients  $A_i$  non tous nuls. On désignera la plus petite de ces pulsations par  $\omega_I$  et la plus grande par  $\omega_{II}$  et on les exprimera en fonction de  $k$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .
- d) Calculer numériquement  $\omega_I$  et  $\omega_{II}$ .
- e) Les solutions harmoniques ainsi déterminées correspondent à deux sortes de mouvement.
  - Dans l'un d'entre eux, l'atome de carbone reste fixe. Quelle est la pulsation associée et quelle est alors la pulsation des deux autres atomes ?
  - Dans l'autre type de mouvement, les deux atomes d'oxygène ont même déplacement à chaque instant. Quelle est la pulsation correspondante ? Calculer dans ce cas le rapport  $A_2/A_1$ .

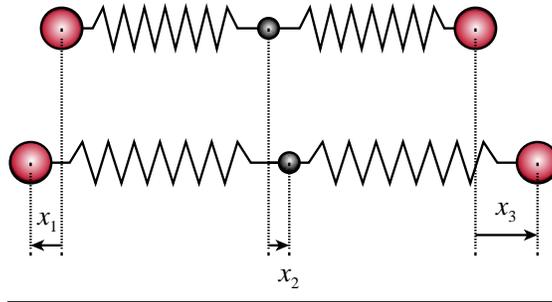


Figure 6 : Vibrations de la molécule de dioxyde de carbone.

### III-B Modes de flexion de la molécule de $\text{CO}_2$

On étudie maintenant un autre type de mouvement dans lequel les liaisons ont une longueur fixe  $r_0$ , mais où les deux liaisons C=O peuvent former entre elles un angle  $\varphi$ . Pour les faibles valeurs de  $\varphi$ , l'énergie potentielle associée à la flexion de la molécule est notée  $E_p = \frac{1}{2} C \varphi^2$ , avec  $C = 7,70 \times 10^{-19}$  J.

On envisage un mode de déplacement particulier de la molécule de faible amplitude, dans lequel

- le plan de la molécule est fixe, noté  $(Gxy)$ ,
- l'atome de carbone reste sur la verticale  $Gy$ , avec un déplacement  $y_2$  par rapport à la position d'équilibre (3 atomes alignés),
- les deux atomes d'oxygène ont le même déplacement vertical  $y_1$  et de petits mouvements horizontaux ( $x_1$  et  $x_3$ ). Ce type de mouvement est appelé mode III de la molécule.

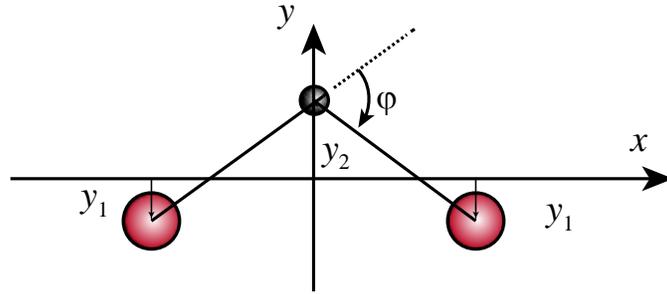


Figure 7 : vibrations de la molécule de dioxyde de carbone.

III-B-1 Montrer que pour de petits déplacements, on a (en faisant un développement limité au premier ordre) :

$$y_2 \left( 1 + \frac{m_2}{2m_1} \right) = r_0 \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = 0$$

III-B-2 Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction de  $\frac{d\varphi}{dt}$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  et  $r_0$ .

III-B-3 Déterminer littéralement puis numériquement la pulsation  $\omega_{III}$  des petites oscillations de  $\varphi$  autour de 0 dans ce mode de vibration.