

SESSION 2005

Filière : 2^{ème} concours

PHYSIQUE

(Epreuve commune aux ENS Ulm et Lyon)

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, sans imprimante et sans document d'accompagnement est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail. Aucun échange n'est permis entre les candidats.

Fibres optiques

NB- Les parties 2 et 3 dépendent des parties précédentes ; les résultats essentiels à la progression sont donnés dans le texte.

1- Propagation guidée entre deux plans réfléchissants

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique guidée dans un milieu transparent d'indice n_1 , limité par deux surfaces métalliques planes, supposées d'extension infinie et parfaitement réfléchissantes.

On note c la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$) et $c_1 = \frac{c}{n_1}$ la vitesse de la lumière dans le milieu d'indice n_1 .

L'onde émise par une diode laser est monochromatique de pulsation ω . On note λ_0 la longueur d'onde de propagation dans le vide et λ_1 la longueur d'onde de propagation dans un milieu homogène d'indice n_1 .

L'onde est guidée entre les deux plans situés en $y = a$ et $-a$. La propagation se fait selon l'axe Ox vers les abscisses x croissantes. On considère une onde de polarisation rectiligne dont le champ électrique est parallèle à l'axe Oz .

Ce champ électrique, indépendant de la coordonnée z , est donnée par l'expression :

$$E(x,y,z,t) = E_0 \sin[k_y(y+a)] \cos(\omega t - k_x x)$$

où k_x et k_y sont des constantes homogènes à des nombres d'onde.

On traduit cette expression en représentation complexe par :

$$\underline{E}(x,y,z) = E_0 \sin[k_y(y+a)] \exp(ik_x x) \quad \text{avec} \quad E(x,y,z,t) = \text{Re} [\underline{E} \exp(-i\omega t)]$$

On note \underline{E}^* le nombre complexe conjugué de \underline{E} .

On définit l'intensité de l'onde par la densité moyenne d'énergie électromagnétique au point de coordonnées (x,y,z) . Elle a pour expression :

$$I(x,y,z) = \frac{1}{2} (n_1)^2 \varepsilon_0 \underline{E}(x,y,z) \underline{E}^*(x,y,z)$$

1-1

Donner l'expression de λ_1 en fonction de λ_0 , puis de ω .

Vérifier que l'unité de la grandeur $I(x,y,z)$ est conforme à la définition précédente (on pourra faire une analyse dimensionnelle à partir de la définition du champ électrique et de la loi de Coulomb).

1-2

On rappelle que l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu d'indice n_1 s'écrit :

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{(c_1)^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

En déduire la relation que cela impose entre les nombres d'onde k_x , k_y et $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$.

1-3

Justifier le fait que la présence des plans métalliques réfléchissants impose la condition aux limites suivante où N est un nombre entier :

$$k_y = \frac{N\pi}{2a}$$

Le nombre entier N définit le mode de la propagation guidée.

On se place dans un plan quelconque parallèle au plan Oyz et d'abscisse $x = x_0$.

Pour chacun des trois premiers modes $N = 1, 2$ et 3 , représenter graphiquement la variation de l'intensité $I(x_0, y, z)$ en fonction de y .

Comment appelle-t-on la propagation de l'onde selon la direction Oy ?

Calculer la valeur moyenne de $I(x_0, y, z)$ dans le plan $x = x_0$ et donner son expression en fonction de E_0 .

1-4

Démontrer que $k_x = k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{N\omega_c}{\omega}\right)^2}$ où $\omega_c = \frac{\pi}{2a} \frac{c}{n_1}$ (pulsation de coupure)

Que se passe-t-il si l'on envoie entre les deux plans une onde de pulsation ω inférieure ω_c ? Donner la condition à remplir par la longueur d'onde λ_0 pour que la propagation guidée soit possible.

1-5

Soit $c_x = \frac{\omega}{k_x}$ la vitesse de phase de la propagation guidée selon Ox dans le mode N .

Pour le mode $N=1$, représenter graphiquement l'allure de la variation de la vitesse de phase c_x en fonction de ω . Interpréter la valeur limite de cette vitesse pour $\omega = \omega_c$ et $\omega \gg \omega_c$.

Commenter brièvement le fait qu'elle puisse excéder la vitesse de la lumière, compte tenu des principes de la physique relativiste.

1-6

Définir le domaine de pulsation ω pour lequel on obtient un guide *unimodal*, c'est-à-dire tel que la propagation guidée n'est possible que dans le seul mode $N=1$.

Donner numériquement l'ordre de grandeur de la distance $2a$ entre les plans réfléchissants qui permet la propagation unimodale de la lumière visible ?

Expliquer brièvement quel est l'intérêt, ainsi que la difficulté pratique de réaliser des fibres optiques unimodales pour leurs applications en télécommunication.

1-7

Transformer le produit figurant dans l'expression de $E(x, y, z, t)$ en une somme de deux termes, chacun d'eux correspondant à une onde progressive plane monochromatique.

Donner les composantes selon Ox et Oy des vecteurs d'onde \vec{K}_1 et \vec{K}_2 correspondant à ces deux ondes progressives. Représenter les vecteurs \vec{K}_1 et \vec{K}_2 dans le plan Oxy .

Montrer que le résultat est compatible avec les lois de la réflexion des rayons optiques sur les plans métalliques.

1-8

On interprète la superposition des ondes \vec{K}_1 et \vec{K}_2 dans le cadre de l'optique.

Quel phénomène optique explique les zones des maximum d'intensité représentés dans la question 1-3 ?

Le mode N de la propagation guidée, décrite précédemment dans le formalisme de l'électromagnétisme, est associé à un angle α d'inclinaison des rayons optiques sur l'axe Ox. Déterminer k_x et k_y en fonction de n_1 et α .

2- Etude d'une fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique à saut d'indice est constituée de deux matériaux diélectriques transparents. Elle comprend un cœur cylindrique d'axe Ox, de rayon a et d'indice n_1 , entouré d'une gaine d'épaisseur b et d'indice n_2 légèrement inférieur à n_1 .

On considère une portion de fibre rectiligne dont l'axe est aligné sur Ox.

Elle est éclairée par un faisceau lumineux monochromatique de pulsation ω et d'ouverture numérique $A = n_0 \sin \alpha_0$.

La figure 1 schématise une coupe de la fibre selon le plan Oxy, ainsi qu'un rayon entrant sur son extrémité plane avec un angle d'incidence α_0 .

On limite toute l'étude en ne considérant que les ondes ou rayons lumineux méridiens, c'est-à-dire se propageant selon un même plan d'incidence contenant l'axe Ox.

2- 1

On interprète la propagation guidée selon l'axe Ox de la fibre par la réflexion successive d'ondes planes sur le dioptré cœur-gaine et l'on utilise les mêmes notations que dans la première partie.

En écrivant la condition de réflexion d'un rayon sur le dioptré limitant le cœur et la gaine, montrer que la propagation guidée n'est efficace que pour un angle $\alpha < \alpha_m$.

Que se passe-t-il si $\alpha > \alpha_m$?

Dans le cas où $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$, exprimer $\cos \alpha_m$ et $\sin \alpha_m$ en fonction de Δ .

2-2

Dans toute la suite, on considère des fibres unimodales dont les indices sont $n_1=1,470$ et $n_2=1,466$. La source de lumière est une diode laser émettant dans l'infra-rouge à la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$. L'indice de l'air n_0 est pris égal à 1.

Calculer numériquement la valeur limite α_m de l'angle α ainsi que l'ouverture numérique maximale du faisceau d'entrée qui peut se propager dans la fibre.

2-3

L'onde guidée dans la fibre unimodale se propage selon l'axe Ox avec une amplitude complexe de la forme $E_M \exp(ik_x x)$, avec $k_x = \frac{\omega}{c_1} \cos \alpha$.

Montrer que la vitesse de phase c_x de l'onde guidée est comprise entre c/n_1 et c/n_2 .

Déterminer la différence de phase ϕ de l'onde monochromatique guidée entre deux points distants d'une longueur X de fibre.

Dans la suite on fera l'approximation $c_x \approx c_1$.

2-4

Sous l'effet de l'augmentation de température δT , la fibre se dilate et la longueur X augmente de $\delta X = \beta_T X \delta T$, où le coefficient de dilatation linéaire est $\beta_T = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}$.

Les indices de réfraction n_1 et n_2 varient également avec la température selon une même loi $\delta n = \gamma_T n \delta T$, avec $\gamma_T = 0,76 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Soit $\delta\phi$ la variation que subit le déphasage ϕ quand la température T de la fibre subit une variation δT . Montrer qu'il s'exprime sous la forme $\delta\phi = C X \delta T$ et calculer numériquement le coefficient C .

3- Exemples de capteurs à fibres

3-1

Les dispositifs schématisés sur les Figure 2 et 3 ont en commun un interféromètre à fibres optiques. Le faisceau émis par la diode laser (monochromatique, de longueur d'onde λ_0) est guidé par un ensemble de fibres unimodales dont les caractéristiques sont celles étudiées précédemment dans la partie 2.

Le coupleur de fibres permet de séparer en S l'onde issue de la source en deux ondes identiques de même amplitude qui sont guidées sur deux fibres F_1 et F_2 . En sens inverse, le coupleur de fibres a pour effet de superposer en S les ondes retour des fibres F_1 et F_2 et de les envoyer à partir du point D sur le récepteur qui détecte l'intensité reçue.

On néglige les absorptions éventuelles.

Démontrer que l'intensité détectée par le récepteur s'exprime sous la forme

$$I_d = I_m (1 + \cos\Phi)$$

où Φ est la différence de phase entre les deux ondes retour qui atteignent le coupleur de fibres et I_m une intensité moyenne qui dépend de l'intensité du faisceau initial.

Représenter graphiquement la variation de I_d en fonction de Φ .

3-2

La figure 2 donne le schéma de principe d'un capteur de température.

Les fibres F_1 et F_2 sont de longueurs X_1 et X_2 ($X_1 \approx X_2$) et leurs extrémités sont terminées par des miroirs M_1 et M_2 renvoyant le faisceau guidé dans la fibre. Dans la pratique on enroule les deux fibres F_1 et F_2 pour miniaturiser le capteur.

La fibre F_1 est maintenue dans un thermostat de température de référence T_1 .

Le dispositif est d'abord testé avec les deux fibres maintenues à la même température du thermostat $T_2 = T_1$. Quelle valeur Φ_0 obtient-on alors pour la phase Φ ?

La fibre F_2 est ensuite plongée dans le milieu de température T_2 à mesurer.

Donner l'expression de l'intensité détectée I_d en fonction de Φ_0 et de la différence de température $\delta T = T_2 - T_1$.

Donner la valeur de la phase Φ_0 à ajuster de façon à optimiser la sensibilité du capteur.

3-3 Application numérique

Dans le cas où l'on a ajusté Φ_0 pour optimiser la sensibilité, déterminer la longueur des fibres $X_1 \approx X_2$ qu'il faut choisir pour qu'une différence de température $\delta T = 10^{-2} \text{ K}$ fasse varier le signal détecté de 1%.

Commenter les avantages pratiques d'un tel capteur, comparé à ceux réalisés à bases thermocouples ou de résistances électriques.

3-4

La figure 3 donne le schéma de principe d'un gyromètre utilisé en navigation aérienne. Les fibres F_1 et F_2 sont ici les deux extrémités d'une même fibre très longue, enroulée sur un cercle de rayon r , l'enroulement faisant un nombre p de tours. Les ondes séparées en S par le coupleur de fibres se propagent en sens inverse dans la fibre circulaire.

L'ensemble du dispositif (comportant les fibres et le coupleur, ainsi que la source et le détecteur) tourne avec une vitesse angulaire Ω autour de l'axe de l'enroulement.

Vues d'un référentiel extérieur (non tournant) les deux ondes tournant en sens inverse dans l'enroulement ont leurs pulsations décalées par effet Doppler de $\delta\omega$ et $-\delta\omega$.

Donner l'expression du décalage $\delta\omega$.

3-5

Il existe une différence de phase Φ entre les deux ondes retour qui se superposent dans le coupleur de fibres (effet Sagnac).

Il est établi que le déphasage de Sagnac est indépendant des caractéristiques du guidage de l'onde, en particulier de l'indice n_1 de la fibre. On peut donc calculer Φ à partir de l'effet Doppler (mentionné précédemment en 3-4) avec $n_1 = 1$.

Donner l'expression de Φ en fonction de r , Ω , p et ω .

En déduire le principe de la mesure de la vitesse Ω à partir du signal donné par le détecteur.

3-6 Application numérique

Le gyromètre a un rayon $r = 20$ cm et un nombre de tours $p = 100$. Calculer la différence de phase Φ obtenue si la vitesse de rotation Ω est de 1 degré d'angle par seconde.

Est-ce facilement détectable ?

Figure 1

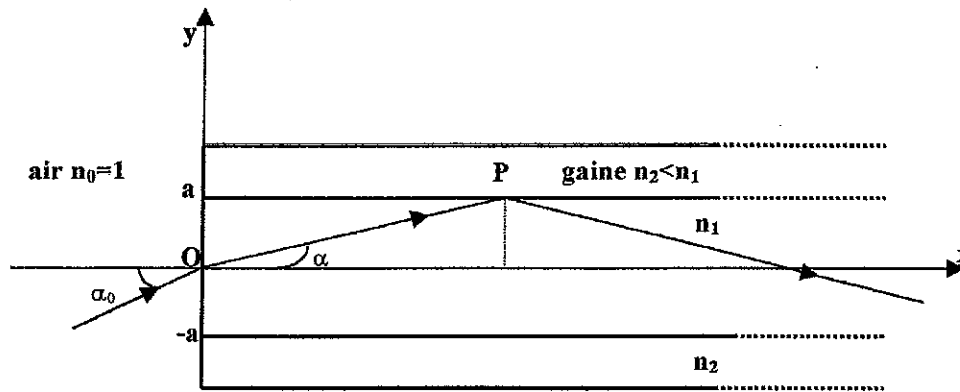


Figure 2

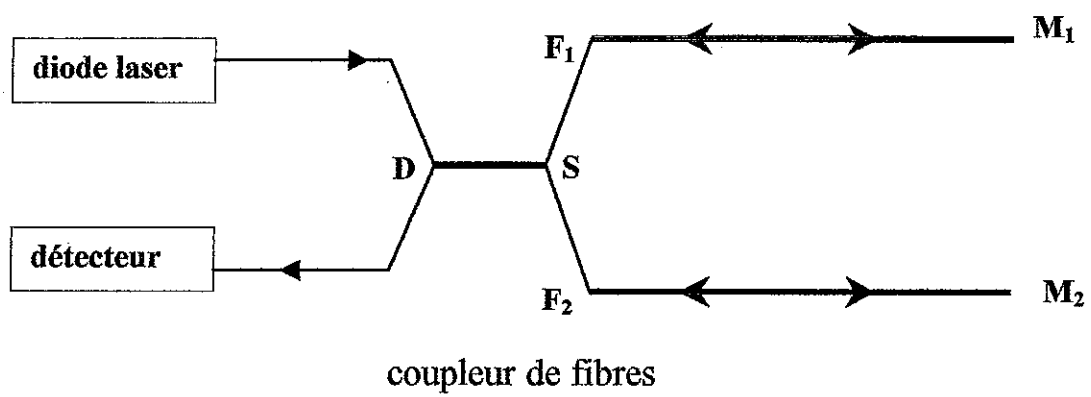


Figure 3

