**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON**

# Concours d'admission session 2016

## Filière universitaire : Second concours

# COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures

*L'usage de calculatrices électroniques de poche, à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé.*

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet comprend deux parties indépendantes (de longueurs inégales).

## I Filtrage électrique.

Nous nous intéressons à l'effet des filtres électroniques passifs représentés figure (**1**) sur des signaux électriques. Les tensions (différences de potentiel) d'entrée et de sortie sont respectivement notés $V_{\mathrm{e}}$ et $V_{\mathrm{s}}$. Ces filtres sont supposés fonctionner "à vide".

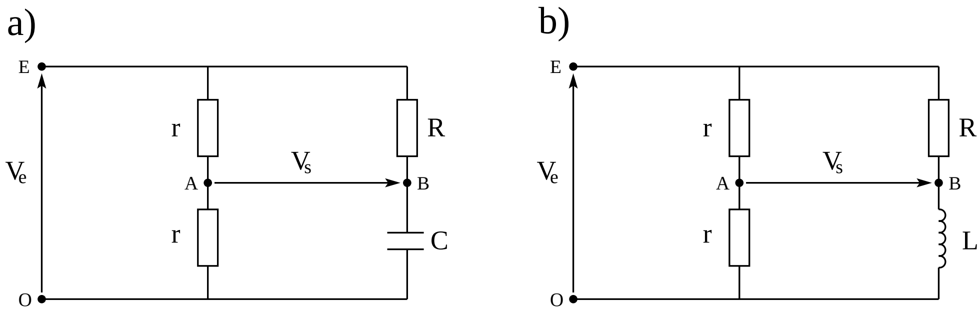


FIGURE **1** – Schémas électriques des filtres (a) et (b).

Pour les applications numériques, nous adopterons : $r = 2$ kΩ, $R = 500$ Ω, $C = 5$ $\mu$F et $L = 5$ mH.

**1.** Calculer la valeur numérique des grandeurs $1/RC$ et $R/L$ et attribuer à ces paramètres une signification physique.

Nous étudions le filtre de la figure (**1**a), en régime harmonique.

**2.** Exprimer les potentiels (tensions) $\underline{V}_{\mathrm{A}}$ et $\underline{V}_{\mathrm{B}}$, en notation complexe, en fonction de $\underline{V}_{\mathrm{e}}$ et des impédances complexes des composants.

**3.** En déduire la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

**4.** Établir qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\underline{H} = H^0 \frac{1 - jx}{1 + jx} \quad \text{où} \quad x \equiv \omega/\omega_0 \qquad (\mathbf{1})$$

Préciser l'expression des constantes $\omega_0$ et $H^0$.

**5. a)** Déterminer le gain en décibel $H_{\mathrm{dB}}$ correspondant.

**b)** Exprimer $\tan\phi$ où $\phi$ est l'argument (phase) de $\underline{H}$.

**c)** Représenter le diagramme de Bode de ce filtre (gain et phase).

**6.** Proposer un exemple d'utilisation d'un tel filtre.

**7.** Expliquer brièvement pourquoi, si le filtre fonctionnait dans des conditions telles qu'il débite un courant $I_S$ à sa sortie, sa fonction de transfert s'en trouverait modifiée.

On impose à l'entrée du filtre un signal créneau ("carré") d'amplitude $A = 5$ V et de valeur moyenne nulle. La décomposition en série de Fourier d'un tel signal (choisi impair), de période $T = 2\pi/\omega$, est de la forme :

$$V_e(t) = K \sum_{n \text{ impair}} \frac{\sin(n\omega t)}{n} \tag{2}$$

**8.** Sans développer le calcul, indiquer comment on détermine le facteur $K$.

**9.** Représenter le spectre (composantes spectrales) d'un signal créneau de fréquence fondamentale $f = 5$ Hz. On prendra soin de graduer l'axe des abscisses.

**10.** **a)** Calculer la fréquence $f_0$ associée à la pulsation $\omega_0$.

**b)** Situer cette fréquence sur le spectre construit à la question (**9**).

**c)** En déduire l'effet du filtre sur le signal d'entrée.

**d)** Représenter, sur un même graphique, les signaux d'entrée et de sortie.

**11.** **a)** Décrire l'effet de ce filtre sur un signal créneau de fréquence fondamentale $f = 500$ Hz.

**b)** Représenter, sur un même graphique, les signaux d'entrée et de sortie.

**12.** Représenter le diagramme de Bode du filtre de la figure (**1**b). On ne fera pas de calcul mais on expliquera la méthode suivie.

## II Optique dans un milieu inhomogène.

Nous nous proposons d'étudier la propagation d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice optique variable spatialement, dans l'approximation de l'optique géométrique. Dans les milieux considérés ici, la perméabilité magnétique relative $\mu_r$ reste unitaire alors que la permittivité relative $\epsilon_r$ peut varier. L'indice de réfraction $n_{\mathrm{a}}$ de l'air est pris à 1.

**1.** Rappeler la définition de l'indice de réfraction $n$ d'un milieu.

**2.** En déduire son expression en fonction de la permittivité relative $\epsilon_r$ du milieu.

**3.** Indiquer ses valeurs typiques pour l'eau et le verre.

**4.** Rappeler la loi de Snell-Descartes relative à la réfraction. En déduire la construction graphique (très simple) d'un rayon traversant l'interface entre deux milieux d'indices $n_1$ et $n_2$.

**5.** Établir cette loi par la méthode de son choix. Il ne s'agira pas de développer les calculs dans le détail mais plutôt d'indiquer le principe sur lequel s'appuie la démonstration.

Dans l'air, sont empilées cinq plaques d'épaisseur $e$ et d'indices respectifs $n_1 = 1{,}1$ ; $n_2 = 1{,}2$ ; $n_3 = 1{,}3$ ; $n_4 = 1{,}4$ ; $n_5 = 1{,}5$ (voir figure **2**a). Un rayon lumineux (1) atteint la plaque inférieure selon un angle d'incidence de $\pi/4$.

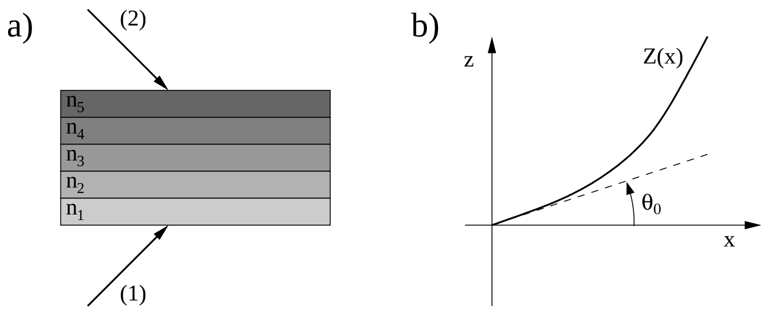


FIGURE **2** – Propagation d'un rayon lumineux dans un milieu stratifié.

**6.** Tracer l'allure du rayon lumineux traversant l'empilement (on ne représentera pas les rayons réfléchis). Ce tracé sera réalisé sans calcul mais il devra être justifié (argumenté).

**7.** D'une manière analogue, réaliser la construction d'un rayon lumineux (2) qui atteint la plaque supérieure selon une incidence de $\pi/4$ (figure **2**a).

**8.** Comparer géométriquement ces deux tracés. Pour quelle raison ce résulat était-il attendu ?

Nous considérons désormais un milieu dont l'indice de réfraction $n$ varie continument selon la direction verticale $z$. Nous souhaitons établir l'équation $Z = Z(x)$ d'un rayon lumineux émis depuis une source, placée à l'origine $(0, 0)$ du repère, émettant selon une direction caractérisée par l'angle $\theta_0$ (figure **2**b). On notera $\theta(x)$ l'angle local tel que $\tan\theta(x) = Z'(x)$.

**9.** Établir que le produit $n(z)\cos(\theta(x))$ est constant, le long d'une trajectoire du rayon.

**10.** Exprimer cette constante. On notera $n_0$ l'indice à l'altitude $z = 0$.

**11.** En déduire que la trajectoire vérifie l'équation différentielle :

$$n_0{}^2\ (\cos\theta_0)^2 \left(1 + [Z'(x)]^2\right) = [n(Z(x))]^2 \qquad (\mathbf{3})$$

Nous considérons dès lors un milieu dont la permittivité diélectrique relative $\epsilon_r$ varie avec l'altitude $z$ selon la dépendance :

$$\epsilon_r(z) = \epsilon^* \left(1 + \frac{z}{L}\right) \qquad (\mathbf{4})$$

où $L$ est une longueur caractéristique et $\epsilon^*$ une constante. Pour les applications numériques, nous adopterons $L = 0{,}5$ m et $\epsilon^* = 1{,}44$.

**12.** Dans quelle mesure ce choix de dépendance spatiale, de forme affine, de $\epsilon_r$ restreint-il la généralité de cette étude ?

**13.** Exprimer $n_0$ et donner sa valeur.

**14.** Préciser l'expression de $(n(z))^2$ en fonction de $z$.

**15.** Nous posons $\lambda \equiv \cos\theta_0$ et effectuons le changement de variable :

$$\begin{cases} u = z/L \quad \text{et} \quad U = Z/L \\ v = x/L \end{cases} \tag{5}$$

Établir que l'équation différentielle, paramétrée par $\lambda$, dont la fonction $U \mapsto U(v)$ est solution, prend la forme (en notant $U' = \mathrm{d}U/\mathrm{d}v$) :

$$1 + U = \lambda^2 \left(1 + U'^2\right) \tag{6}$$

**16.** Déterminer la solution $U = U(v)$ de cette équation (on pourra, préalablement, dériver l'équation (**6**)).

**17.** Exprimer cette solution et représenter l'allure de la trajectoire correspondante (dans l'espace $(v, u)$) pour chacun des cas, $\theta_0 = \pi/4$ et $\theta_0 = -\pi/4$.

**18.** Nous plaçons à l'origine $(0, 0)$ une source lumineuse isotrope. Discuter à quelle condition il existe un rayon, issu de cette source, qui passe par le point $\mathrm{M}_1(v_1, u_1)$ fixé de l'espace $(u, v)$.

**19.** En déduire qu'il existe une zone d'ombre et donner son équation.

**20.** La représenter dans le plan $(v, u)$. Esquisser également l'allure de quelques rayons.

⋆ ⋆
⋆