# Composition de Mathématiques A, Filière MP (XLC)

**Rapport de MM. Jérôme FEHRENBACH, Vincent HUMILIÈRE, Pierre-Vincent KOSELEFF et Paul-Émile PARADAN, correcteurs.**

L'épreuve portait sur l'étude des représentations de dimension finie de l'algèbre de Lie de $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$.

Elle ne comportait pas de questions particulièrement difficiles mais souvent un peu délicates à traiter correctement.

La moyenne générale est 8,96, et une dizaine de candidats a obtenu la note 20.

Les notes des candidats se répartissent selon les données du tableau suivant :

| | | |
|---|---|---|
| $0 \leq \mathrm{N} < 4$ | 54 | 3,4 % |
| $4 \leq \mathrm{N} < 8$ | 569 | 35,8 % |
| $8 \leq \mathrm{N} < 12$ | 704 | 44,3 % |
| $12 \leq \mathrm{N} < 16$ | 229 | 14,4 % |
| $16 \leq \mathrm{N} \leq 20$ | 32 | 2,0 % |
| Total | 1588 | 100 % |
| Nombre de copies : 1588 | | |
| Note moyenne : 8,96 | | |
| Écart-type : 3,15 | | |

Comme les années précédentes, nous ne pouvons que constater en général une certaine désinvolture dans la rédaction, voire une absence de rédaction. Il manque très souvent des quantificateurs dans les expressions mathématiques et les fins des démonstrations sont souvent négligées. En général, une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, soit un passage d'une ligne de calcul à la suivante, soit une affirmation qui découle d'une question précédente ou d'une hypothèsede l'énoncé, sans s'y référer explicitement.

Par ailleurs, nous mettons en garde les candidats quant à l'utilisation de résultats hors programme.

Ceci peut expliquer des notes moyennes pour des candidats qui ont traité un grand nombre de questions mais dont les démonstrations étaient incomplètes.

**Examen détaillé des questions**

**1a.** Il convenait de donner une explication pour la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ en tant qu'espace vectoriel réel. D'ailleurs, une part importante donne une réponse fausse. De manière générale, on attend d'un candidat qu'il justifie sa réponse, qu'il fournisse une preuve.

En ce qui concerne la seconde partie de la question, il convenait de montrer que $\mathcal{L}$ était bien un espace vectoriel réel et donc, par exemple de démontrer que c'était une intersection de noyaux d'applications linéaires (sur $\mathbf{R}$).

**1b.** La quasi totalité des candidats a réussi cette question.

**2a.** Beaucoup de candidats confondent la convergence normale et la convergence absolue. Il n'allait pas de soi que la norme subordonnée est sous-multiplicative. De trop nombreux candidats invoquent le critère de d'Alembert qui n'a pas de sens dans ce contexte. Il convenait de rappeler que $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est un espace complet pour pouvoir invoquer l'absolue convergence.

**2b.** De trop nombreux candidats esquissent une démonstration par récurrence en évitant la question du passage à la limite et donc de la continuité de $A \mapsto P^{-1}AP$.

**2c.** Là encore, de trop nombreux candidats tentent une récurrence alors qu'il convient d'examiner la limite.

**2d.** Cette question a été relativement bien traitée.

**3.** De trop nombreux candidats ne savent pas quelles propriétés permettent de caractériser un sous-groupe, ou confondent les lois . et +.

**4.** De nombreux candidats considèrent différents cas, mais oublient d'être exhaustifs.

**5a.** Cette question pouvait se traiter rapidement en utilisant la caractérisation matricielle des éléments de $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$. Une majorité de candidats essaie d'utiliser la question précédente et se perd dans des calculs fastidieux.

**5b.** Cette question a été relativement bien traitée.

**6a.** Cette question délicate n'a été traitée correctement que par très peu de candidats. Certains parvenaient à démontrer la diagonalisabilité mais omettaient de montrer que la matrice de passage appartient à $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$. La diagonalisabilité des matrices unitaires ne figurant pas au programme, on attendait une démonstration complète. Ceci était de plus suggéré par les questions précédentes.

**6b.** L'implication directe peut se démontrer en utilisant la question précédente. Des arguments farfelus concernant les fonctions trigonométriques sont présents dans un grand nombre de copies. Un très petit nombre de copies a traité correctement le cas où il faut échanger les deux vecteurs de base à l'aide d'une matrice de $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$.

**7a.** Le programme ne comporte pas de résultat sur les produits de Cauchy dans les algèbres. Très peu de copies effectuent des manipulation de sommes correctes. Le passage à la limite dans les exponentielles est licite grâce à la continuité du produit matriciel, ce qui est très peu souvent invoqué.

**7b.** Très peu de candidats expliquent pourquoi l'exponentiation commute avec la transposition ($A \mapsto {}^tA$) ou avec la conjugaison ($A \mapsto \bar{A}$), ni même qu'une matrice de $\mathcal{L}$ commute avec sa transposée. La plupart du temps on arrive au résultat par des manipulations formelles sans justification.

**7c.** Cette question a été relativement bien traitée.

**7d.** De nombreux candidats ont répondu correctement. Un nombre significatif a invoqué un argument de dimension, comme s'il s'agissait d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**8a.** Cette question a été relativement bien traitée.

**8b.** Ces calculs simples ont été correctement traités.

**8c.** Cette question a été peu abordée.

**9.** Cette question a été peu abordée. Elle faisait appel à l'ensemble des résultats obtenus dans la deuxième partie.

**10.** Les calculs simples ont été menés généralement de façon correcte, bien que de nombreux candidats ne se soient souvent pas aperçus qu'il était possible de donner tous les résultats en fonction des endomorphismes $w$, $z$ et $e$.

**11.** Cette question a été assez bien traitée, en général par récurrence.

**12.** Le raisonnement permettant de conclure manque souvent d'arguments clés.

**13.** Ces question faciles ont été peu traitées ou partiellement.

**14a.** Un raisonnement simple d'algèbre linéaire permettait de conclure. Il n'a pas été très souvent trouvé dans les copies.

**14b.** Cette question peut se traiter facilement à l'aide de ce qui précède. Seule une poignée de candidats est parvenue jusqu'à ce point.