ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2013

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION D'INFORMATIQUE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet comporte cinq parties. Pour une meilleure compréhension, il est fortement conseillé de commencer par traiter les parties 1 et 2. Les trois parties suivantes sont largement indépendantes. Il est aussi conseillé de parcourir l'intégralité du sujet avant de commencer à le traiter. Pour les questions nécessitant l'écriture d'un algorithme, il est demandé d'écrire cet algorithme dans le langage de programmation de votre choix. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Introduction

Les automates cellulaires sont un modèle particulier de systèmes dynamiques discrets, introduits dans les années 60 par John von Neumann dans le but d'étudier les phénomènes auto-reproductifs. Ils consistent en un réseau de cellules disposées de manière régulière, et qui possèdent chacune et à chaque instant un état choisi parmi un ensemble fini. Les cellules évoluent par application d'une règle de mise à jour définie localement, cette évolution se faisant de manière synchrone et uniforme.

Dans toute la suite du sujet, on choisit comme réseau de cellules l'ensemble ordonné des entiers $\mathbb{Z}$, et on s'intéresse donc aux automates cellulaires unidimensionnels. Un **alphabet** A est un ensemble fini, dont les éléments sont appelés **les états**. Une **configuration** est un élément de $A^{\mathbb{Z}}$, autrement dit une application $x : \mathbb{Z} \to A$, ou encore un mot bi-infini. Pour alléger les notations on notera x_i l'état $x(i)$.

$$x = \cdots \; \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \; \cdots$$

$$x_5 = 0$$

FIGURE 1 – Un exemple de configuration x sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ (la cellule x_0 est grisée, la cellule x_5 est encadrée).

Si E est un ensemble fini, on note $|E|$ son nombre d'éléments. Un **automate cellulaire** est la donnée d'un triplet (A, V, f), où

- A est un ensemble fini, appelé **alphabet**, dont les éléments sont appelés **les états** ;
- $V = [-r, r] \cap \mathbb{Z}$ est un intervalle d'entiers centré en 0, appelé **voisinage** ;
- $f : A^{|V|} \to A$ est la **fonction de transition** de l'automate.

On associe à un tel automate cellulaire une fonction $F : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ appelé sa **fonction globale**, définie par

$$[F(x)]_i = f(x_{i-r}, x_{i-r+1}, \ldots, x_{i+r-1}, x_{i+r})$$

pour toute configuration infinie $x \in A^{\mathbb{Z}}$ (la notation $[F(x)]_i$ désigne la $i^{\text{ième}}$ cellule de la configuration $F(x)$).

Par abus de langage, dans la suite, on parlera d'automate cellulaire F pour désigner un automate cellulaire dont la fonction globale est F.

Un **diagramme espace-temps** d'un automate cellulaire F est un élément d de $A^{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ qui représente l'évolution de la configuration initiale $x = d_{|\mathbb{Z}\times\{0\}}$ sous l'action de F : pour tout entier $i \geq 0$, on a $d_{|\mathbb{Z}\times\{i+1\}} = F(d_{|\mathbb{Z}\times\{i\}})$ (par convention le temps évolue donc de bas en haut). La ligne inférieure $d_{|\mathbb{Z}\times\{0\}}$ du diagramme espace-temps détermine donc complètement celui-ci. On représente en général un fragment de diagramme espace-temps par un graphique similaire à celui de la Figure 3.

1 Automates cellulaires élémentaires

Dans cette partie on s'intéresse aux automates cellulaires définis sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et avec voisinage $\{-1, 0, 1\}$. De tels automates cellulaires sont appelés **automates cellulaires élémentaires**. Dans tous les diagrammes espace-temps de cette partie, l'état 0 est représenté par $\square$ et l'état 1 par $\blacksquare$.

$f(1,0,0,0,0) = 1$

		1		
1	0	0	0	0

$f(0,1,0,0,0) = 1$

		1		
0	1	0	0	0

$f(0,0,0,1,0) = 1$

		1		
0	0	0	1	0

$f(0,0,0,0,1) = 1$

		1		
0	0	0	0	1

$f(0,1,1,1,0) = 1$

		1		
0	1	1	1	0

$f(a,b,c,d,e) = 0$

		0		
a	b	c	d	e

pour tout autre 5-uplet (a,b,c,d,e)

FIGURE 2 – Un exemple de fonction de transition f d'automate cellulaire, sur l'alphabet $\{0,1\}$ et de voisinage $[-2;2]$, et sa représentation graphique.

	- - -	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	- - -
	- - -	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	- - -
	- - -	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	- - -
$F^6(x) =$	- - -	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	- - -
	- - -	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	- - -
	- - -	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	- - -
	- - -	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	- - -
$F^2(x) =$	- - -	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	- - -
$F(x) =$	- - -	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	- - -
$x =$	- - -	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	- - -

FIGURE 3 – Un exemple de diagramme espace-temps de l'automate cellulaire dont la fonction de transition est donnée dans la Figure 2. La cellule x_0 est grisée. La partie du diagramme correspondant à $f(F(x)_7, F(x)_8, F(x)_9, F(x)_{10}, F(x)_{11}) = 1$ est encadrée.

1. Combien existe-t-il d'automates cellulaires élémentaires ? On notera $\mathcal{N}$ cet entier.

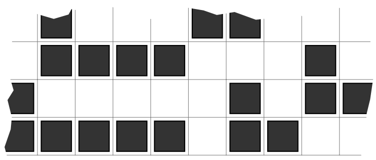
On attribue à chaque automate élémentaire $(\{0,1\}, \{-1,0,1\}, f)$ de fonction globale F le numéro

$$n(F) = \sum_{i=0}^{7} 2^i f(\bar{i}^2)$$

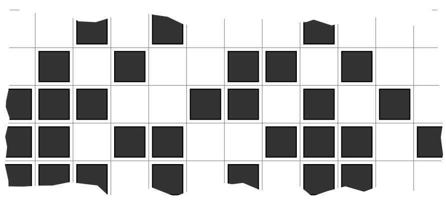
où $\bar{i}^2$ est l'écriture en base 2 de i, éventuellement complétée par des 0 en préfixe pour qu'elle soit de longueur 3 (par exemple l'entier 5 s'écrit 011), assimilée à un triplet (par exemple $\bar{5}^2 = (0,1,1)$).

2. Montrer que la fonction n est injective, et que son image est l'ensemble d'entiers $[0, \mathcal{N}-1] \cap \mathbb{Z}$.
3. (a) Écrire les règles de transition de l'automate élémentaire de numéro 54, dont on notera dans cette question la fonction globale F_{54},et dessiner deux itérations $F_{54}(x)$ et $F_{54}^2(x)$ où $x = \ldots 0110100110010110 \ldots$.

(b) Quel est le numéro de l'automate dont l'évolution sur une configuration $x = \ldots 1111101100 \ldots$ est la suivante ? *(On pourra commencer par écrire ses règles de transition.)*



(c) La figure ci-dessous peut-elle être un morceau de diagramme espace-temps d'un automate cellulaire élémentaire ? Pourquoi ? Quel est le voisinage minimal d'un automate cellulaire faisant apparaître ce motif dans ses diagrammes espace-temps ?



4. On considère l'automate cellulaire élémentaire de numéro 150, et de fonction globale F_{150}.
   (a) Calculer deux itérations $F_{150}(x)$ et $F_{150}^2(x)$ où $x = \ldots 0110100110010110 \ldots$.
   (b) Montrer que la fonction globale F_{150} est surjective mais pas injective. Quel est le nombre d'antécédents possibles pour chaque configuration ?

2 Une première implémentation

Soit F un automate cellulaire sur l'alphabet A et de voisinage $\{-1, 0, 1\}$. On suppose pour cette question que l'alphabet est $A = \{0, \ldots, |A| - 1\}$. Étant donnée une configuration x, on souhaite calculer ses images successives par F. On propose pour cela d'écrire des algorithmes prenant comme entrée :

- un entier N et un entier $n \leq N$;
- un entier ℓ tel que $A = \{0, \ldots, \ell - 1\}$;
- un tableau T tridimensionnel indexé par $[0, \ell - 1] \times [0, \ell - 1] \times [0, \ell - 1]$, représentant la fonction de transition de l'automate, c'est-à-dire que $T[a, b, c]$ contient l'entier $f(a, b, c)$;
- un tableau M de taille $2N + 1$, tel que $M[i]$ contient x_{i-N} (l'indice i varie de 0 à $2N$) ;

et qui renvoient un tableau M' de taille $2k + 1$, avec $k = N - n$, tel que $M'[i]$ contient $[F^n(x)]_{i+k}$.

1. Écrire un algorithme naïf. Quelle est sa complexité en temps ? en espace ?
2. Voici deux morceaux d'algorithmes pour tenter de répondre à la question précédente.

Algorithme 1 :

pour i *de* 0 *à* $2N$ **faire**
  $X[i] \leftarrow M[i]$;
pour j *de* 1 *à* n **faire**
  pour i *de* 0 *à* $2N - 2j$ **faire**
    $X[i] \leftarrow T[X[i], X[i+1], X[i+2]]$;

Algorithme 2 :

pour i *de* 0 *à* $2N$ **faire**
  $X[i] \leftarrow M[i]$;
pour j *de* 1 *à* n **faire**
  pour i *de* j *à* $2N - j$ **faire**
    $X[i] \leftarrow T[X[i-1], X[i], X[i+1]]$;

(a) Lequel de ces deux algorithmes permet le calcul de $[F^n(x)]_0$? Quelle cellule du tableau X contient cette information ? Justifier.

(b) Quelle est leur complexité en temps ? en espace ?

3 Implémentation alternatives des automates cellulaires

Dans cette partie on s'intéresse à des solutions alternatives pour implémenter les automates cellulaires. On suppose ici que le voisinage est $\{-1, 0, 1\}$.

3.1 Configurations périodiques

On choisit de se restreindre aux configurations périodiques. On dit qu'une configuration x est **périodique** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que $x_i = x_{i+k}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, et qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **ultimement périodique** s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $u_i = u_{i+k}$ pour tout $i \geq N$.

1. Améliorer l'algorithme de la question 1 de la partie 2 en tenant compte de la périodicité de x. Quelle est la complexité de ce nouvel algorithme en temps ? en espace ?
2. Montrer que la fonction définie par

$$d(x,y) = \begin{cases} 2^{-\min\{|i| : x_i \neq y_i\}} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

   vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y, z \in A^{\mathbb{Z}},\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

3. Soit $x \in A^{\mathbb{Z}}$ une configuration quelconque. Montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe une configuration y périodique telle que $d(x,y) < \epsilon$.
4. Montrer que si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est périodique, alors la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique.
5. Donner un automate cellulaire f et une configuration $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tels que la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas ultimement périodique.
6. En déduire les limites de l'implémentation proposée en question 1.

3.2 Complétion aléatoire de configurations finies

On souhaite écrire un algorithme qui permette de calculer les $2N+1$ cellules centrales de la $F^n(x)$ pour une certaine configuration x. On suppose qu'on ne connaît que les $2N+1$ cellules centrales de la configuration initiale x, qui ne sont a priori pas suffisantes pour réaliser le calcul souhaité. Une solution possible est la suivante : dès qu'on a besoin de connaître le contenu d'une cellule de x (ou d'une de ses itérées) qui n'est pas une des $2N+1$ cellules centrales, on choisit au hasard le contenu de cette cellule. On suppose pour cela que l'on dispose d'une fonction `random()` qui renvoie une lettre choisie de manière aléatoire et uniforme dans l'alphabet A.

1. Écrire un algorithme qui réalise l'idée exposée ci-dessus.
2. Quel est l'inconvénient majeur de cette solution ? Illustrer le problème sur un exemple.

4 Génération universelle de motifs

Les automates cellulaires peuvent être vus comme un modèle de calcul. On illustre ce point de vue sur un exemple, celui de la génération universelle de motifs. Dans cette partie on se donne l'alphabet $A_5 = \{0, 1, \ldots, 5\}$. Une configuration x est **0-finie** si $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de $i \in \mathbb{Z}$. On souhaite définir un automate cellulaire sur l'alphabet A_5 qui génère tous les mots finis à partir de n'importe quelle configuration 0-finie : pour toute configuration initiale 0-finie et tout mot $w \in {A_5}^*$, il existe un entier n tel que w apparaît dans $F^n(x)$.

Si x est une configuration, on définit le nombre réel $\alpha(x)$ par :

$$\alpha(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \cdot 6^{-i}.$$

On note n mod 6 (resp. n div 6) le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de n par 6. Pour tout entier n, la relation suivante est ainsi vérifiée :

$$n = (n \bmod 6) + 6(n \operatorname{div} 6).$$

1. Montrer que la fonction α est injective sur l'ensemble des configurations 0-finies, mais pas sur l'ensemble des configurations quelconques.
2. Soit x une configuration 0-finie, on définit la configuration 0-finie y par $\alpha(y) = 6^{-m} \cdot \alpha(x)$. Justifier que y est bien définie. Exprimer y en fonction de x. *(on pourra utiliser la fonction décalage $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ définie par $[\sigma(x)]_i = x_{i+1}$)*
3. On définit l'automate cellulaire d'alphabet A_5 et de voisinage $\{-1, 0, 1\}$ donné par la fonction de transition
$$f : \begin{array}{ccc} A_5 \times A_5 \times A_5 & \to & A_5 \\ (r,s,t) & \mapsto & (3s) \bmod 6 + (3t) \operatorname{div} 6 \end{array}$$
Comme la définition de $f(r,s,t)$ ne dépend pas du contenu de la cellule de gauche r, on écrira simplement dans la suite $f(s,t)$ pour $f(r,s,t)$. Cela revient à supposer que le voisinage de l'automate est $\{0, 1\}$ et n'est plus centré en zéro.
   (a) Montrer que cette fonction est bien définie, c'est-à-dire que $f(s,t) \in A_5$ pour tout (s,t).
   (b) Écrire les règles de transition de f dans un tableau.
   (c) Dessiner les 10 premières étapes de l'évolution de l'automate sur la configuration initiale $\ldots 0001000 \ldots$.
4. Montrer que pour toute configuration 0-finie x on a $\alpha(F(x)) = 3\alpha(x)$.
5. Montrer que $\log_6(3)$ est irrationnel.

On admet pour les questions suivantes que la suite $(\mathrm{Frac}(n \log_6(3)))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$, où $\mathrm{Frac}(\lambda)$ est la partie rationnelle du réel λ, c'est-à-dire le réel dans l'intervalle $[0,1[$ tel que $\lambda - \mathrm{Frac}(\lambda) \in \mathbb{Z}$.

5. Soit x une configuration 0-finie et $w \in A_5^*$ un mot sur A_5. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que w apparaît dans $F^n(x)$.
6. Retrouver le mot 354 dans le diagramme espace-temps de la question 3.c.
7. Trouver une fonction globale G d'automate cellulaire tel que pour toute configuration 0-finie $x \in A^{\mathbb{Z}}$, on a $F \circ G(x) = G \circ F(x) = x$.

5 Expression libre

Voici un diagramme espace-temps d'un automate cellulaire défini sur l'alphabet

Commenter et expliquer ce que fait cet automate cellulaire (on rappelle que le temps s'écoule de bas en haut).