SESSION 2013

Filière : 2^{nd} concours

Physique

Durée : 3 heures

Ce livret comprend 4 pages.

Les parties I et II sont totalement indépendantes.

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Partie I - Exercice : Mécanique du point

Un point matériel de masse m, repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (r, θ), décrit une trajectoire plane dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. La vitesse du point vérifie :

$$\vec{V} = V_0\,(\vec{e}_\theta + \vec{e}_y) \quad ,$$

où V_0 est une constante positive.
À $t = 0$, la particule passe au point de coordonnées $(x = a, y = 0)$. On cherche à établir la trajectoire du point.

I.1. Exprimer les vecteurs unitaires de la base cartésienne en fonction de ceux de la base polaire.

I.2. En déduire l'expression de la vitesse dans la base polaire.

I.3. Montrer que la trajectoire est régie par l'équation suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = r\,\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

I.4. En déduire l'équation polaire de la trajectoire.

I.5. Quelle est la nature de la trajectoire ? La représenter pour $a = 2$.

I.6. Justifier que la trajectoire est compatible avec le mouvement d'un point dans un champ de force centrale.
Cette force serait-elle attractive ou répulsive (justifier) ?

I.7. Calculer la constante des aires pour la trajectoire.

I.8. Comment la trajectoire est-elle modifiée si l'on change le signe de V_0 ?
Si l'on double la valeur de V_0 ?

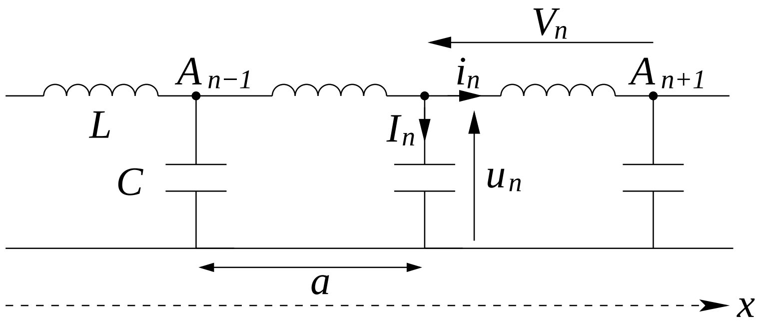
Partie II - Problème : propagation dans une ligne bifilaire

On considère une ligne bifilaire constituée de N quadripôles identiques en série. Chaque quadripôle n, de longueur a, est constitué d'une bobine d'inductance L, et d'un condensateur de capacité C (voir figure ci-dessous). On note x la position de long de la ligne, mesurée depuis l'origine, et donc $x_n = na$ la position du $n^{\text{ème}}$ nœud.

On note A_n le $n^{\text{ème}}$ nœud. On note i_n le courant parcourant la $n^{\text{ème}}$ bobine et V_n la tension à ses bornes (en convention récepteur). On note I_n le courant parcourant le $n^{\text{ème}}$ condensateur et u_n la tension à ses bornes (en convention récepteur).

Ce problème vise à étudier la propagation d'une onde plane (évidement) progressive harmonique (OPPH) de pulsation $\omega > 0$ et de nombre d'onde $k > 0$ dans la ligne. Les tensions u_n et intensités i_n sont ainsi notées :

$$\begin{cases} u_n = \underline{u_0} \quad e^{j(\omega t - k x_n)} \\ i_n = \underline{i_0} \quad e^{j(\omega t - k x_n)} \end{cases}$$



II.1. Donner les relations liant I_n et u_n d'une part, et i_n et V_n d'autre part.

II.2. Écrire la loi des mailles dans la maille $(n, n+1)$, et la loi des nœuds en A_n et A_{n+1}.

II.3. Montrer que :

$$\frac{d^2 i_n(t)}{dt^2} - \omega_0^2 \, (i_{n+1} + i_{n-1} - 2i_n) = 0 \ .$$

où ω_0 est une constante dont on donnera l'expression.

II.4. Montrer que la tension obéit à une équation identique.

II.5. Établir la relation de dispersion d'une OPPH. On introduira une pulsation caractéristique ω_c. Indication. On utilisera la formule trigonométrique : $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$.

II.6. Tracer la fonction $\omega(k)$. On se limitera à $k \leq \pi/a$.

II.7. Sans calcul, donner les valeurs des vitesses de phase v_φ et de groupe v_g pour $\omega = 0$ et $\omega = \omega_c$. Sur un même graphique, donner l'allure de v_φ et v_g en fonction de ω.

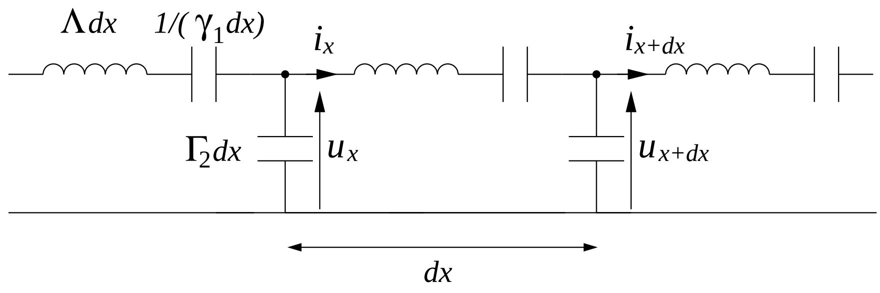
II.8. Expliquer pourquoi la ligne présente une pulsation de coupure. La ligne agit-elle comme un filtre passe-bas ou passe-haut ?

II.9. Établir les équations vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$ dans la limite des milieux continus. On introduira une célérité caractéristique c_0 que l'on exprimera.

II.10. Établir la relation de dispersion d'une OPPH.
Pourquoi ne retrouve-t-on pas le résultat de la question 8 ?

II.11. Proposer un montage mécanique analogue de cette ligne bifilaire.

On introduit désormais un condensateur, d'admittance $\delta G_1 = \gamma_1 dx$, en série avec la bobine et l'on note $\delta C_2 = \Gamma_2\, dx$ la capacité du condensateur en parallèle (figure ci-dessous). **N.B.** Les grandeurs γ_1 et Γ_2 n'ont pas la même dimension. L'inductance de la bobine est donnée par $\delta L = \Lambda dx$. On introduit les impédances de la bobine et des condensateurs, notées Z_L, Z_{C_1} et Z_{C_2}.



II.12. En passant en notation complexe, exprimer grâce aux lois des mailles et nœuds, les différentielles $\mathrm{d}\underline{u} = \underline{u}(x+dx) - \underline{u}(x)$ et $\mathrm{d}\underline{i} = \underline{i}(x+dx) - \underline{i}(x)$.

II.13. En déduire que l'intensité vérifie :

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} + \omega_1^2\, i(x,t) = 0$$

où c_1 et ω_1 sont des constantes dont on donnera l'expression et la dimension.

II.14. Montrer que la tension $u(x,t)$ obéit à une équation identique.

II.15. Établir la relation de dispersion.

II.16. Tracer l'allure de $\omega(k)$ en précisant ses comportements asymptotiques en $k \to 0$ et $k \to \infty$.

II.17. Calculer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g et les tracer.
Le milieu est-il dispersif ? Dissipatif ? (justifier).

II.18. Expliquer pourquoi la ligne présente une pulsation de coupure ω_c.
La ligne agit-elle comme un filtre passe-bas ou passe-haut ?

II.19. Décrire qualitativement (sans calcul) les solutions obtenues pour $\omega < \omega_c$.