Rapport sur l'oral de Mathématiques 2013

Oral spécifique E.N.S. Paris : Olivier Schiffmann
Oral commun Paris-Lyon-Cachan : Bertrand Deroin, David Gérard-Varet, Filippo Santambroggio.

1 Commentaires sur le déroulement des épreuves

Nous souhaitons ici faire quelques remarques générales sur le déroulement des épreuves. Bien que de bon sens, ces remarques restent peu prises en compte par bon nombre de candidats.

- Un but essentiel de l'oral est de juger de la capacité du candidat à analyser un problème. Comprendre où se situe la difficulté, faire des parallèles avec d'autres problèmes déjà connus, discuter du problème dans des cas particuliers pertinents est très apprécié. A ce titre, prendre quelques minutes pour étudier l'énoncé, sans se lancer tambour battant dans des calculs, peut être une bonne option.
- Le jury constate encore une certaine forme de bluff chez quelques candidats: flot incessant de paroles, saut précipité des prémisses à la conclusion d'un raisonnement pour en masquer les failles, emploi intempestif de l'expression "c'est trivial" ou "c'est clair". Ce type d'attitude est hautement contre-productif.
- A contrario de la remarque précédente, trop de candidats restent muets dès lors qu'ils ne trouvent pas directement la réponse à la question posée. Rappelons ici que le niveau des oraux d'ENS étant élevé, les exercices nécessitent en général un raisonnement long et progressif. Le jury en a pleinement conscience, et attend du candidat qu'il lui montre son aptitude à raisonner, même si ce raisonnement est incomplet.
- La capacité du candidat à faire preuve d'initiative est grandement appréciée. En particulier, l'aptitude du candidat à juger qu'une piste est mauvaise, et se relancer sur une autre voie contribue à améliorer la note.
- L'aptitude à simplifier un problème, par exemple en montrant que le cas général peut se ramener à un sous-cas est perçue très positivement par le jury. De plus, elle permet concrètement de venir à bout de nombreux exercices.
- La prestation d'un candidat est jugée sur toute la durée de l'épreuve. Un mauvais début d'oral ne disqualifie pas le candidat, et celui-ci est invité à rester combatif et positif, d'autant plus que ce type d'attitude est nécessaire au métier de chercheur auquel forment les ENS. Par ailleurs, la perception qu'a le candidat de sa prestation est souvent fausse, en particulier parce qu'elle n'intègre pas les prestations des autres candidats. Cette dernière remarque doit là encore inciter le candidat à rester concentré jusqu'au bout.

2 Exemples d'exercices et commentaires

Exercice

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $x \in]0,1]$, on définit

$$F(x) \;:=\; \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Montrer que F est prolongeable en une fonction C^0 sur $[0,1]$.
2. Montrer l'inégalité:
$$\left(\int_0^1 |F(t)|^2\right)^{1/2} \;\leq\; 2\left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2}.$$
3. Montrer l'inégalité: pour tout $p \in \mathbb{N},\; p \geq 2$,
$$\left(\int_0^1 |F(t)|^p\right)^{1/p} \;\leq\; \frac{p}{p-1}\left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{1/p}.$$

Commentaire. Cet exercice a en général été bien traité. Néanmoins, pour la question 1, certains candidats ont cherché à conclure par l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz uniquement, et sont restés bloqués sans chercher d'alternative.

Exercice

Soit E l'e.v. des fonctions $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui sont 2π-périodiques. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^*$. On définit l'endomorphime $T \in L(E)$ par $Tf(x) = f(x+2\pi\alpha) - f(x)$. Trouver le noyau et l'image de T.

Commentaire. L'identification formelle du noyau et de l'image de T a été bien traitée. En revanche, l'obtention d'une preuve rigoureuse a été plus difficile. En particulier, la construction d' antécédents sous forme de série a révélé quelques difficultés dans la preuve de convergence, et du caractère C^∞ de la somme obtenue. Le lien entre décroissances des coefficients de Fourier et régularité de la série de Fourier associée n'est pas toujours connu.

Exercice. Soit E un evn de dimension finie, F un sev de E. Soit $\varphi \in F'$. Montrer que φ admet un prolongement $\phi \in E'$, tel que $\|\phi\|_{E'} \leq \|\varphi\|_{F'}$.

Commentaire. Cette version "dimension finie" du théorème de Hahn-Banach a été diversement traitée. Au niveau des points positifs: beaucoup de candidats ont réalisé qu'il suffisait de traiter le cas où F est un hyperplan de E. Au niveau des points négatifs, certains candidats ont révélé leur incompréhension des normes d'applications linéaires, et ont voulu arguer de l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$ pour utiliser une norme particulière.

Exercice.

Soit G un sous-groupe de $GL_d(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $k \in [0,2[$ tel que

$$\forall M \in G, \quad \|M - Id\| \leq k,$$

(où $\|\cdot\|$ est la norme d'endomorphisme associée la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$).

1. Montrer que les valeurs propres des matrices de G sont de module 1.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall M \in G, \quad M^n = Id.$$

Commentaire. La première question a été résolue par la plupart des candidats. Notons que plusieurs candidats ont cru résoudre complètement la deuxième question en montrant que toute matrice M de G vérifiait $M^n = Id$ pour un certain n, sans se rendre compte qu'on demandait à ce que l'indice n ne dépende pas de M.

Exercice.

1. Soit E un espace vectoriel normé, X un espace de Banach. Soient L_0, L_1 des opérateurs linéaires continus de X dans E. Pour tout $t \in [0,1]$, on définit $L_t = (1-t)L_0 + tL_1$. On suppose: il existe C tel que pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x \in X$,

$$\|x\|_X \ \leq \ C \, \|L_t x\|_E.$$

   Montrer que L_1 est surjective de X dans E si et seulement si L_0 l'est.
2. Soit X un espace de Banach, A un isomorphisme de X, et $\phi : X \mapsto X$ une application Lipschitzienne telle que $Lip(\phi) < 1/\|A^{-1}\|$. Montrer que $A + \phi$ est inversible, d'inverse Lipschitzien.

Commentaire. L'exercice était précédé de la part du jury d'un rappel sur le théorème de point fixe de Banach-Picard. Malheureusement, la plupart des candidats n'ont pas su appliquer ce théorème à l'exercice. De manière plus large, les candidats ne semblaient pas faire de lien entre le théorème de point fixe et la résolution d'équations, qui en est pourtant l'application principale.

Exercice.

1. Soit $k = \mathbb{Q}$ et V un espace vectoriel sur k. Soit $\Omega = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset V$ un ensemble de r points distincts. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in V^*$ telle que $f(x_i) \neq f(x_j)$ pour $i \neq j$.
2. On suppose maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Même question si on remplace Ω par un ensemble dénombrable de points distincts.

Commentaire. Le jury a été surpris de la difficulté qu'ont eu les candidats à résoudre cet exercice d'algèbre linéaire, qui ne fait appel qu'à des propriétés élémentaires de dualité dans les espaces vectoriels. Les candidats qui ont cherché à se ramener à la dimension finie ont aussi souvent eu du mal à le faire (existence de complémentaire en dimension quelconque).

Exercice.

1. Soit A un ensemble muni d'une opération $\star : A \times A \to A$ vérifiant la propriété suivante : pour tout triplet $(a, b, c) \in A^3$ on a

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c.$$

Montrer que les différents parenthésages d'un produit $a_1 \star \cdots \star a_r$ sont tous égaux.

2. Soit A un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles. On suppose que A est muni d'une opération $\circ$ et d'une collection de bijections

$$\sigma_{a,b,c} : a \circ (b \circ c) \simeq (a \circ b) \circ c, \qquad \forall\ (a, b, c) \in A^3$$

Peut-on toujours déduire de ces données une bijection 'canonique' entre deux parenthésages d'un produit $a_1 \circ \cdots \circ a_r$? {Sinon, quelles conditions doit-on imposer aux $(\sigma_{a,b,c})_{a,b,c}$ pour que ceci soit le cas ? }

Commentaire. Ce problème n'a été posé qu'en deuxième partie de planche, à des candidats ayant très bien réussi un premier exercice. Pour le jury, l'objectif de cet exercice difficile (qui ne nécessite aucune connaissance particulière, et qui ne se base sur aucun théorème du programme) est de voir si le candidat est capable de formaliser le problème et d'introduire lui-même les outils mathématiques adéquats. La partie 1) de l'exercice peut se démontrer à l'aide d'une fastidieuse récurrence sur le nombre de termes du produit. Cet argument de récurrence devient transparent si l'on introduit un graphe dont les sommets sont les parenthésages possibles d'un produit (indexés par des arbres binaires), et dont les arêtes relient deux parenthésages obtenus par une relation $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$; il faut alors voir que le graphe ainsi défini est connexe. Pour la partie 2), volontairement posée sous forme de problème ouvert, il faut considérer des *chemins* dans ce graphe, et des relations d'équivalences sur l'ensemble des chemins reliant deux sommets.

Exercice.

1. Construire une application $f : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ qui envoie compact sur compact mais qui n'est pas continue.

2. Construire une application $f : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ qui envoie connexe sur connexe mais qui n'est pas continue.

3. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ qui envoie connexe sur connexe *et* compact sur compact est continue.

Commentaire. Les parties 1) et 2) de ce problème ont permis au jury de tester l'imagination des candidats dans la recherche de contre-exemples en topologie. Ils ont été en général bien traités. La dernière partie, plus difficile, a le mérite de pouvoir s'attaquer de nombreuses façons différentes. Le jury a particulièrement apprécié la capacité des candidats à proposer plusieurs pistes possibles.