

Banque MPI - SESSION 2013  
Épreuve orale de TIPE - Mathématiques  
Écoles concernées : CACHAN, LYON, PARIS  
Coefficients :  
ULM MPI : 8 INFO : 1 / LYON : 1,5 / CACHAN MP : 2 INFO : 3  
MEMBRES DU JURY : V. Humilière, P. Marchal, B. Schraen, H. Zaag.

### Déroulement de l'épreuve

L'épreuve de TIPE est commune aux trois ENS. Le candidat dépose, lors de son inscription au concours, un rapport sous la forme d'un *unique* fichier pdf<sup>1</sup> présentant son travail, et précise quelle en est la discipline dominante (mathématiques, informatique, physique). Le rapport, dont la longueur est d'environ deux à cinq pages, décrit la problématique que le candidat a choisi d'étudier, les outils qu'il a utilisés et les réponses qu'il a apportées ; ce rapport doit naturellement être l'œuvre du candidat et non la reproduction d'un ouvrage. Cependant, *ce rapport n'est pas évalué en tant que tel* : il constitue le support sur lequel s'appuiera l'épreuve orale. Il n'a pas pour vocation d'être encyclopédique ni de décrire toutes les connaissances de son auteur dans un domaine donné : il est donc inutile, même nuisible, de présenter des textes très longs que les examinateurs ne pourront pas étudier correctement, ou d'y adjoindre des annexes pléthoriques. À plus forte raison les pièces supplémentaires présentées le jour de l'épreuve ne seront pas prises en considération.

L'oral proprement dit dure 40–45 minutes. Le candidat est tout d'abord invité à présenter son travail, en abordant rapidement le contenu mathématique : cet exposé d'introduction sert à entrer dans le vif du sujet, le jury l'interrompt rapidement pour vérifier la compréhension des concepts utilisés en posant des questions plus précises ou en proposant des exercices courts en rapport avec le sujet traité.

Le choix est laissé au candidat de présenter son travail sur transparents<sup>2</sup> ou au tableau, un tableau et un rétroprojecteur sont à sa disposition dans la salle d'interrogation.

Le candidat ne doit pas s'inquiéter de n'avoir eu le temps de présenter, à la fin de l'épreuve, qu'une petite partie du plan prévu, ni du fait que le jury ait concentré ses questions sur un point particulier. On ne doit pas non plus être gêné par le fait que les examinateurs posent beaucoup d'exercices ou que leur rapport avec le sujet ne soit pas immédiatement évident (il peut ne se dégager que progressivement).

---

1. Cet unique fichier pdf inclut la page de garde, et porte comme nom NOM-Prenom-TIPE-ENS-annee.pdf *sans accents*

2. À ce propos, nous rappelons que les règles de l'épreuve de TIPE à certains autres concours imposent la destruction des documents qui y sont apportés — ce n'est pas le cas aux ENS — et qu'il faut donc veiller à ne pas être pris au dépourvu en n'ayant plus aucun support de présentation.

### **Critères d'évaluation**

L'épreuve de TIPE de mathématiques est, avant tout, une épreuve de mathématiques. *Le premier critère d'évaluation est donc la bonne maîtrise du contenu mathématique de l'étude.* Les sujets pluridisciplinaires sont les bienvenus, tout comme les considérations d'ordre empirique et expérimental, ou les implémentations informatiques, mais le candidat doit être à même de les relier à une analyse mathématique (par exemple, d'un cas simplifié). Le jury souhaite trouver, notamment, des énoncés mathématiques précis sur lesquels il pourra asseoir ses questions. Le soin apporté à d'autres éléments du rapport ne peut en aucun cas remédier à l'insuffisance de contenu mathématique que nous avons constatée dans certains travaux.

En particulier, nous attirons l'attention du candidat sur l'*importance du choix de la discipline* dans laquelle il présentera son TIPE (mathématiques, informatique ou physique) et qui conditionne le jury qui l'écouterà : un TIPE centré sur la programmation informatique d'un algorithme de résolution (type Rubik's cube) aurait peut-être été plus avantageusement présenté en informatique. Les jurys ne sont pas mixtes et le jury de mathématiques n'a pas vocation à tester les programmes informatiques. *On attend dans tous les cas que le travail ait un contenu scientifique sérieux dans la discipline en question.*

### **Compétences attendues**

L'épreuve de TIPE a la particularité de permettre au candidat de choisir le thème sur lequel il sera interrogé. En contrepartie, le jury attend de sa part une bonne compréhension de ce sujet et des outils mathématiques employés pour le traiter.

Il va de soi qu'on ne suppose du candidat *a priori* aucune connaissance au-delà du programme des classes préparatoires, et nous lui conseillons de rester autant que possible dans ce cadre, ne s'en écartant que si cela est nécessaire au sujet choisi. Nous pensons de façon générale qu'il est possible de trouver des thèmes riches et originaux sans s'éloigner beaucoup du programme.

En revanche, la maîtrise des concepts avec lesquels on prétend avoir travaillé est indispensable. Au minimum, pour chaque terme introduit on peut s'attendre à ce que le jury demande un exemple ou un contre-exemple, ou fasse vérifier la définition dans un cas simple. Ces questions ne doivent pas prendre le candidat au dépourvu.

S'agissant d'un théorème, le candidat doit être capable, si on le lui demande, d'exposer les idées-clés de sa démonstration sans entrer dans les détails, ou d'expliquer en quoi il est pertinent et en quoi les hypothèses sont nécessaires. Il n'est bien sûr pas défendu d'admettre une démonstration mais on devra au moins avoir une idée de sa difficulté.

Nous mettons spécialement en garde les candidats contre la tentation d'abor-

der des sujets très ambitieux et par conséquent mal maîtrisés, ou encore de choisir un domaine mathématique vaste (comme la topologie algébrique ou l'analyse complexe), et de présenter un rapport qui n'est qu'une compilation de théorèmes sans initiative personnelle et sur laquelle on n'aura aucun recul.

### **Thèmes choisis**

Le thème de l'année était *Invariance, similitude*. À titre d'exemple, voici quelques-uns des thèmes les plus fréquents dans lesquels s'inscrivent les sujets que nous avons rencontrés cette année :

- algèbres linéaire : invariants de similitudes, décomposition de Frobenius, algorithmes de décompositions matricielles ;
- géométrie : invariant de Dehn, géométrie projective, groupes de transformations (paradoxe de Banach Tarski) ;
- théorie des groupes : actions de groupes, représentations des groupes, théorie géométrique des groupes (groupes hyperboliques) ;
- théorie des jeux, équilibre de Nash ;
- études d'équations différentielles : stabilité, théorème de Poincaré-Bendixson, équations de Lotka-Volterra ;
- systèmes dynamiques : suites définies par récurrence, fonction logistique, fractales, ergodicité etc. ;
- équations aux dérivées partielles : équation de Burger ;
- théorie analytique des nombres : séries de Dirichlet, fonctions  $\zeta$  et fonctions  $L$  ;
- topologie algébrique : groupe fondamental, théorie des noeuds ;
- arithmétique : corps finis, cryptographie, codes correcteurs d'erreurs ;
- logique mathématique (indépendance de l'axiome du choix, hypothèse du continu).

Quelques rares candidats ont préparé leur TIPE en ne s'appuyant sur aucune littérature existante, cherchant à résoudre par eux-mêmes un problème de leur choix. Précisons que ce type d'étude n'est pas inintéressant a priori mais demande un lourd investissement, un bon encadrement et que le problème soit bien choisi.

### **Remarques sur la forme**

Le jury a été, dans l'ensemble, plutôt satisfait des différents rapports. C'est le signe que l'épreuve est prise au sérieux et travaillée pendant la période (pourtant chargée) de la prépa. Il est appréciable de voir une véritable bibliographie<sup>3</sup> figurer en fin du rapport. Il semble pourtant nécessaire de préciser que, même s'il ne s'agit pas d'une épreuve de français, le rapport contient du texte, pour lequel les règles

---

3. Rappelons à ce sujet qu'un article scientifique doit être cité en indiquant les auteurs, le titre, le nom de la revue où il est paru, le volume, l'année, et les pages de début et de fin ; quant à un livre, il ne faut pas oublier d'en préciser l'éditeur et l'année. Pour un article de Wikipédia, il convient de donner le titre exact, la langue d'édition, et la date de consultation de l'article.

de la grammaire française restent toujours d'actualité, et nous ne pouvons que conseiller aux candidats de se relire attentivement avant de rendre leur rapport.

Certains candidats ont présenté un travail commun sur un sujet. Le jury apprécie que, dans un tel cas, le candidat le mentionne. Il sera dans tous les cas évalué sur sa compréhension personnelle du sujet présenté. Il est donc fortement recommandé que deux candidats ayant travaillé ensemble ne présentent pas le même rapport.

Les rapports sont acceptés au format pdf depuis 2010. Le jury recommande au candidat d'utiliser celui-là et de rendre un seul fichier contenant le rapport, les illustrations, les annexes, la bibliographie etc. Des outils existent permettant de convertir tous les formats en pdf, et le cas échéant de concaténer tous les fichiers en un seul.

En cas d'usage de transparents, ceux-ci doivent être lisibles. La simple photocopie du document écrit donne généralement des caractères trop petits. Précisons qu'il ne sert à rien de projeter le texte du rapport, que le jury a sous les yeux.

Pour finir, nous tenons à remercier ceux qui, par le recul qu'ils ont pris sur la question qu'ils étudiaient, le niveau de leur travail et la qualité de leur exposé, nous ont donné l'occasion d'avoir un échange d'un réel intérêt scientifique.