Oral de mathématiques spécifique ENS Lyon, filière MP 2013

Examinateurs : Olivier Fouquet, Daniel Han-Kwan, Patrick Massot

1 Objectifs et principes généraux

Le premier but de cet oral est d'évaluer la compréhension des notions et théorèmes au programme. Le deuxième est d'évaluer la capacité à analyser des questions difficiles puis à proposer et explorer des stratégies de résolution tout en réagissant de façon pertinente aux indications. Le troisième est d'évaluer l'aisance technique des candidats et leur capacité à formaliser un raisonnement mathématique.

Dans l'ensemble, les admissibles ont été raisonnablement solides sur la connaissance du cours, avec l'exception de certains chapitres de géométrie et du chapitre sur les formes différentielles. Nous devons cependant insister sur la nécessité de comprendre les preuves et techniques du cours afin de pouvoir les réadapter dans des situations similaires. Le dynamisme ainsi que la prise d'initiative ont été très appréciés et valorisés (d'autant plus que cela rend en général l'oral plus agréable).

Nous rappelons aux futurs candidats que l'examinateur n'est pas malveillant et que chacune de ses interventions a pour but d'aider le candidat ou de le remettre sur le droit chemin. La persévérance est certes parfois une qualité mais elle peut aussi devenir problématique si elle se transforme en acharnement, surtout quand l'examinateur explique au candidat pourquoi une piste n'a aucune chance d'aboutir. Par ailleurs, inutile de préciser que même lorsqu'il se sent déboussolé, le candidat se doit de rester courtois et que toute attitude agressive est inutile voire préjudiciable.

Enfin, il est rarement innocent que nous demandions de justifier un point particulier et nous avons parfois été étonnés de constater que certains candidats refusaient de répondre à de telles questions, en arguant que "c'est évident" : si c'est le cas, autant donner une réponse précise et concise à l'examinateur. Ces demandes de justifications ont parfois permis à certains candidats de se rendre compte de l'inexactitude de leurs propos. Notons au passage qu'une affirmation inexacte n'est pas nécessairement très pénalisante si le candidat rectifie de lui-même ou suite à une demande de précisions de l'examinateur.

Nous insistons également sur le fait que si un candidat énonce une affirmation sans en donner de preuve, il doit être capable de la justifier à la demande de l'examinateur. À ce sujet, l'utilisation de résultats hors programme reste très risquée, d'autant plus que tous les exercices sont pensés de sorte à pouvoir être traités dans le cadre strict du programme.

2 Déroulement de l'oral

L'oral de mathématiques spécifique à l'ENS Lyon dure 45 minutes.

En début d'oral, la prise d'énoncé est cruciale. Certains candidats n'ont tout simplement pas l'idée d'écrire l'énoncé dicté par l'examinateur ou l'écrivent de façon très partielle. D'autres l'écrivent de façon si brouillonne qu'il est impossible de distinguer les hypothèses des questions. De façon plus anecdotique, une certaine familiarité avec l'alphabet grec peut s'avérer utile.

Ensuite nous laissons environ dix minutes au candidat pour se familiariser avec l'énoncé. Durant cette phase il est vivement recommandé aux candidats de ne pas dire à haute voix tout ce qui leur passe par la tête. Cependant des remarques et observations préliminaires peuvent être bienvenues.

Les exercices posés se présentent sous des formes assez diverses. Il faut en particulier distinguer :

- les exercices comportant un grand nombre de questions intermédiaires, auquel cas nous avons valorisé les candidats réussissant à faire le lien entre les différents points étudiés (ce qui est souvent la preuve d'une bonne vision d'ensemble) et à ne pas perdre de temps sur les questions préliminaires servant d'indications aux suivantes ;
- les exercices posés de manière ouverte, ce qui peut être assez déstabilisant. Pour de tels exercices, nous n'exigions bien entendu pas une réponse immédiate et définitive du candidat ; en revanche, il était très apprécié que le candidat traite certains exemples pertinents, identifie et isole les difficultés afin de diminuer la complexité du problème. Ces exercices étaient souvent propices à des discussions avec l'examinateur (certaines indications sont alors proposées au fur et à mesure), ce qui a souvent permis de juger de la maturité scientifique du candidat.

Dans les deux cas, le candidat doit avoir une attitude active et ne pas se contenter d'attendre que l'examinateur donne une indication. Il ne faut pas non plus énoncer des idées à tort et à travers en guettant les réactions de l'examinateur.

D'autre part, il est souvent utile que les candidats traitent un cas particulier intéressant. Essayer de traiter trop d'exemples est en revanche un écueil à éviter : il vaut mieux parfois réfléchir en prenant son temps afin d'avoir une meilleure vision d'ensemble. Enfin, un dessin bien réalisé aide beaucoup les candidats et est très apprécié des examinateurs.

De manière générale, nous conseillons aux candidats de réfléchir à une stratégie raisonnée et de l'expliquer à l'examinateur avant de se lancer dans des calculs parfois hasardeux. Même si cela n'aboutit pas toujours, une telle attitude est une preuve de la solidité d'un candidat.

À l'inverse, il ne faut pas tomber dans l'excès qui consiste à penser que les exercices nécessitant un calcul non-trivial n'existent pas.

En conclusion, nous avons trouvé le niveau des candidats admissibles bon et plutôt homogène. Certains font même preuve d'un aisance technique ainsi que d'une intuition tout à fait remarquables. Les points abordés ci-dessus sont soulignés car ils jouent des tours à une minorité non négligeable de candidats. Les notes vont de 2 à 20 et pourront sembler sévères mais cela vient en particulier de la volonté d'utiliser tout l'éventail des notes.

3 Exemples d'exercices commentés

Voici maintenant quelques exercices posés durant cette session et qui illustrent les difficultés rencontrées par les candidats.

1. Théorème de Banach–Steinhaus par la méthode de la bosse glissante

1. Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T\colon X \to Y$ une opérateur linéaire continu. Montrer que, pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on a

$$\sup\{\|T(y)\|\colon y \in B(x,r)\} \geq r\|T\| \ .$$

2. Soit X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé et $(T_n)\colon X \to Y$ une suite d'opérateurs linéaires continus tels que pour tout $x \in X$ la suite $T_n(x)$ soit bornée. Montrer que $\sup \|T_n\| < +\infty$.

Indication : *Pour cela on pourra supposer par l'absurde que* $\|T_n\| \geq 10^n$.

3. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, si une suite d'opérateurs linéaires continus $(T_n)\colon X \to Y$ converge simplement vers T alors T est un opérateur linéaire continu. Que se passe-t-il si on ne suppose pas que X est complet ?

Commentaire. L'objectif final est très classique, c'est le théorème de Banach-Steinhaus mais la méthode imposée un peu moins. La première difficulté consiste à éviter la tentation du hors-programme. Nous avons commencé l'oral en signalant que nous ne voulions pas entendre parler du théorème de Baire mais certains candidats sont restés tentés.

La deuxième écueil général consiste à affaiblir les hypothèses durant la réflexion. Les candidats essayant de répondre à la deuxième question en utilisant seulement l'existence d'un x_0 dans X tel que $T_n(x_0)$ soit borné (surtout s'il n'excluent pas $x_0 = 0$) ne sont pas seulement sûrs d'échouer : ils font aussi preuve d'un grave manque de discernement.

2. Séries de Fourier lacunaires

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodiques continue. On note $\hat{f}(n)$ le n-ième coefficient de Fourier complexe de f. On suppose qu'il existe une suite croissante d'entiers n_k telle que $\hat{f}(n) = 0$ si n n'est pas un n_k. On pose $l_k = \min(n_k - n_{k-1}, n_{k+1} - n_k)$ et on suppose que l_k tend vers l'infini.

1. Montrer que si T est un polynôme trigonométrique de degré au plus $l_k - 1$ alors

$$\hat{f}(n_k) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)e^{-in_k x}\, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, dx}$$

2. Montrer que si f est dérivable en zéro et $f(0) = f'(0) = 0$ alors $\hat{f}(n_k) = O(1/l_k)$. On utilisera

$$T_k(x) = \left(\frac{\sin(\nu_k + 1/2)x}{\sin(x/2)}\right)^4$$

avec $\nu_k = \lfloor \frac{l_k - 1}{4} \rfloor$.

3. Montrer que si f est dérivable en au moins un point alors $\hat{f}(n_k) = O(1/l_k)$.

Commentaire. C'est une version un peu simplifiée du premier théorème d'un article de Kahane, Izumi et Izumi. Il redémontre en particulier que la classique $\sum \frac{cos(2^n x)}{2^n}$ est nulle part dérivable.

La question 1 est un exemple de question préliminaire facile mais qui sert à rentrer dans le sujet et apporte déjà des indications sur l'efficacité du candidat.

La question 2 est le cœur de l'exercice. Le point technique principal consiste à estimer, pour $\alpha \in \{0, 1\}$, les intégrales

$$I_{k,\alpha} = \int_0^\pi x^\alpha \left(\frac{\sin(\nu_k + 1/2)x}{\sin(x/2)} \right)^4 dx.$$

Ici on teste à la fois le discernement et l'agilité technique. Le discernement consiste à identifier quel morceau de cette intégrale joue un rôle important et quel morceau peut être majoré ou minoré grossièrement. Ici le terme oscillant de plus en plus quand k grandit est crucial alors que le dénominateur ne mérite pas mieux que les inégalités provenant de la concavité du sinus sur $[0, \pi/2]$.

La question 3 est le véritable énoncé du théorème mais toute la difficulté est dans la question 2.

3. Théorème de Waring Soit k le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On rappelle que le groupe multiplicatif k^* est un groupe cyclique. Soit k^n l'ensemble des n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les $(i_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{N}^n$ pour que l'égalité suivante soit vérifiée.

$$S = \sum_{x \in \mathbb{A}(k)} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = 0$$

Que vaut cette somme lorsque cette égalité n'est pas vérifiée ?

Soit $R \in k[x_1, \cdots, x_n]$ un polynôme en les indéterminées x_i à coefficients dans k. Supposons que $R(0, \cdots, 0) = 0$ et que n soit strictement supérieur au degré total de R (on rappelle que le degré total est le maximum de la somme des exposants sur les monômes de R). Soit Q le polynôme $1 - R^{p-1}$. Soit N_R le nombre de solutions de l'équation $R = 0$ dans k^n.

2. Montrer l'égalité suivante dans k.

$$N_R \mod p = \sum_{x \in k^n} Q(x)$$

3. En déduire que l'équation $R = 0$ a au moins p solutions distinctes dans k^n.

4. Montrer que la condition sur le degré est nécessaire.

Commentaire. La première question est un exemple typique de situation où il est très profitable de commencer par un cas particulier, ici $n = 1$.

Dans ce cas, il faut calculer $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^i$ en fonction de i. Le premier écueil général à éviter est le calcul hâtif qui néglige des cas particuliers. Ici il faut distinguer les cas $i = 0$, $(p-1)|i$ avec $i \neq 0$ et $(p-1) \nmid i$. Pour ce dernier cas, on est tenté d'utiliser la formule des sommes partielles de séries géométriques mais la contexte de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ fait légitimement hésiter. C'est un cas typique où l'on attend du candidat qu'il adapte la démonstration d'un résultat du cours (il n'y a aucune difficulté dans le cas présent).

4. Ellipses de Lőwner

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des ellipses centrées en l'origine dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour tous E_0, E_1 dans $\mathcal{E}$, il existe une base B de déterminant 1 dans $\mathbb{R}^2$ telles que E_i ait pour équation $a_i x^2 + c_i y^2 = 1$ dans la base B.

2. Montrer qu'on peut identifier naturellement $\mathcal{E}$ à une partie convexe de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que la fonction qui à un élément de $\mathcal{E}$ associe son aire est strictement convexe sur $\mathcal{E}$.

4. Soit K un compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique élément de $\mathcal{E}$ d'aire minimale qui contient K.

5. On suppose que le bord C de K vérifie la propriété suivante : pour tous x et y dans C, il existe $A \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $AK = K$ et $Ax = y$. Raconter.

Commentaire. Cet exercice est un mélange de géométrie, topologie et algèbre linéaire. Hélas plusieurs candidats sont restés bloqués sur la géométrie la plus élémentaire. La question 1 s'est révélée incroyablement sélective. Les liens entre géométrie, équations et algèbre bilinéaire dans le chapitre sur les coniques sont à travailler.

Dans un autre exercice, certains candidats n'ont jamais réussi à faire une dessin de la droite d'équation $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ faisant figurer les paramètres réels p et θ.

5. Un peu de géométrie énumérative

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne quatre droites deux à deux non coplanaires et dont les directions sont trois à trois indépendantes. Le but de cet exercice est de déterminer combien de droites dans l'espace sont sécantes aux quatre droites données.

1. Soit $\Delta = \{p + tu\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ et $\Delta' = \{p' + su'\ ;\ s \in \mathbb{R}\}$ deux droites dans l'espace. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p, p', u et u' pour que Δ et Δ' s'intersectent.

2. On suppose que deux droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires. Montrer qu'il existe un repère (pas nécessairement orthonormé) dans lequel

$$\Delta = \{(t, 0, 0)\ ;\ t \in \mathbb{R}\} \qquad \Delta' = \{(0, 1, s)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}.$$

3. Conclure.

Commentaire. Là encore la géométrie en lien avec l'algèbre linéaire élémentaire fait des ravages. L'efficacité sur la première question est très sélective. La dernière question demande vraiment beaucoup de sang froid mais il était intéressant de voir les réactions. Notons que la réponse n'est pas dans l'ensemble $\{0, 1, +\infty\}$ donc l'intuition n'est pas d'un grand secours.

6. Classe entières en cohomologie de de Rham

Soit $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ une réunion finie d'ouverts convexes dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que X est connexe par arcs. On pose $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Soit α une forme différentielle fermée (de degré 1) sur X. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) pour toute courbe fermée γ polygonale par morceaux, $\int_\gamma \alpha \in \mathbb{Z}$

(ii) il existe des fonction $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ telles que
- $df_i = \alpha$ sur U_i
- pour tous i et j, la fonction $f_i - f_j$ est constante et à valeur entière sur U_{ij}.

Commentaire. Cet exercice est présent dans ce rapport pour rappeler que tous les chapitres du programme sont susceptibles d'intervenir lors de l'oral, même ceux qui n'occupent pas une place centrale. Certains candidats ignoraient toutes les définitions et énoncés pertinents.

Un aspect général intéressant consiste à choisir l'ordre dans lequel traiter les deux implications à démontrer. L'énoncé étant un peu déstabilisant, on peut se rabattre sur le type de quantificateurs utilisés, en oubliant complètement la sémantique. Clairement il est sans doute plus facile de supposer l'existence d'objets pour montrer des propriétés. On vise donc (ii) implique (i) en espérant glaner des idées pour la réciproque.

Dans la phase d'analyse préliminaire, on attend la remarque que l'exercice est vide dans le cas des formes exactes. Pour la suite il est donc utile d'avoir en tête un exemple de forme fermée non exacte sur un ouvert du plan.

Bien sûr cet exercice est un cas particulier d'un résultat bien plus général dont les hypothèses sont moins artificielles.

7. Module de surjectivité d'une application linéaire

Le module de surjectivité d'une application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est

$$ms(L) = \begin{cases} 0 & \text{si } L \text{ n'est pas surjective} \\ \sup\{1/\|R\| \ ; \ R \text{ inverse à droite de } L\} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\|R\|$ est la norme d'opérateur par rapport aux normes dérivant des produits scalaire canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

1. Calculer $ms(L)$ lorsque $m = 1$.

2. On écrit $L = L_1 + \cdots + L_m$ où $L_j = pr_j \circ L$ avec pr_j la projection sur le $j$ème axe $\mathrm{Vect}(e_j)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_k)_{k\neq j}$. On suppose que $\|L_1\| = \max \|L_j\|$ (pour simplifier les notations). On pose $L' = L_2 + \cdots + L_m$. Donner une fonction strictement positive f telle que

$$ms(L_1) > \varepsilon \text{ et } ms\left(L'_{|\ker L_1}\right) > \varepsilon \implies ms(L) > \frac{\varepsilon}{f(m)}.$$

Commentaire. Cet exercice nécessite une vraie aisance avec les normes subordonnées. La première question a donné lieu à un florilège d'inégalités à l'envers. Dans la deuxième question, la caractérisation de la surjectivité de L en terme de L_1 et L' (sans parler de module de surjectivité) a été un désastre malgré l'aide apportée par la formulation de la question. Certains candidats ont conjecturé (voir utilisé sans explication) que L est surjectif si et seulement si L' et L_1 le sont. L'erreur en elle même est pardonnable mais c'est un bon exemple montrant que les demandes d'explications de l'examinateur sont à prendre au sérieux.