ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2014

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Notations. Les corps des nombres réels et des nombres complexes sont notés $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Le disque ouvert de $\mathbf{C}$, de centre 0 et de rayon 1, est noté $\mathbb{D}$.

Soit $a_0, a_1, \ldots$ des nombres complexes. Pour une série $\sum a_n$, les sommes partielles sont notées

$$s_N(\mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Rappelons que la série est *convergente* si la suite $(s_N(\mathbf{a}))_{N\in\mathbf{N}}$ est convergente ; sa somme, notée $\sum_0^\infty a_n$ est alors la limite de cette suite :

$$\sum_0^\infty a_n = \lim_{N\to+\infty} s_N(\mathbf{a}).$$

Cette notion de convergence, la seule qui soit au programme du concours, est appelée *convergence au sens usuel.* On la compare ci-dessous à d'autres notions de convergence qui seront introduites dans l'énoncé. De même, la convergence des suites qui figure au programme est une convergence au sens usuel.

1. Convergence d'une suite au sens de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On définit une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$v_n := \frac{1}{n}(u_0 + \cdots + u_{n-1}).$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *converge au sens de Cesàro* vers la limite $\ell \in \mathbf{C}$ si la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.

Q1. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge (au sens usuel) vers une limite ℓ. Montrer que cette suite converge aussi au sens de Cesàro, vers la même limite.

Q2. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge au sens de Cesàro, mais qui ne converge pas au sens usuel.

Q3. Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge au sens de Cesàro vers ℓ, montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$w_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(n-k)u_k$$

est convergente. Calculer sa limite.

2. Séries : convergence au sens de Cesàro

Soit $\sum a_n$ une série de nombres complexes. Si la suite $(s_n(\mathbf{a}))_{n\geqslant 0}$ converge au sens de Cesàro vers S, on dit que la série $\sum a_n$ *converge au sens de Cesàro*, et S est appelée *somme de Cesàro* de cette série. Une série convergente est donc aussi convergente au sens de Cesàro (question **Q1** ci-dessus).

Q4. Soit z un nombre complexe. La série $\sum e^{inz}$ est-elle convergente au sens usuel ? Au sens de Cesàro ? Calculer l'une ou l'autre somme, si elle existe.

Q5. Étant donnée une série $\sum a_n$, on considère la série $\sum d_n$, où les nombres d_n sont définis par $d_n = a_{n+1}$. Montrer que si l'une des deux séries converge au sens de Cesàro, alors l'autre aussi, et leurs sommes de Cesàro respectives sont liées par la formule $S(\mathbf{a}) = S(\mathbf{d}) + a_0$.

Q6. Montrer qu'une série $\sum a_n$ à termes réels positifs converge au sens de Cesàro si et seulement si elle converge au sens usuel.

3. Un théorème de Cesàro

On considère dans cette partie deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ de nombres complexes, et on forme leur produit de Cauchy $\sum c_n$, où

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Les sommes partielles de ces séries sont notées respectivement $s_n(\mathbf{a})$, $s_n(\mathbf{b})$ et $s_n(\mathbf{c})$.

Q7. On prend $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes (au sens usuel), mais que la série $\sum c_n$ ne l'est pas.

Q8. Dans le cas général, on définit

$$\sigma_n(\mathbf{c}) = \frac{1}{n}(s_0(\mathbf{c}) + \cdots + s_{n-1}(\mathbf{c})).$$

Exprimer $\sigma_n(\mathbf{c})$ en fonction de certains des produits $s_j(\mathbf{a})s_k(\mathbf{b})$.

Q9. On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes (au sens usuel). Montrer que $\sum c_n$ converge au sens de Cesàro, et que sa somme de Cesàro est égale au produit de $\sum_0^\infty a_n$ et $\sum_0^\infty b_n$.

4. Séries : convergence au sens d'Abel

Pour une série $\sum a_n$ à termes complexes, on définit une fonction $z \mapsto f(z)$ comme la somme d'une série entière :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Le disque de convergence de cette série entière est noté Δ.

Q10. Pour $z \in \Delta \cap \mathbb{D}$, exprimer $\frac{1}{1-z} f(z)$ comme la somme d'une série entière, dans laquelle on utilisera les sommes partielles $s_n(\mathbf{a})$.

Si Δ contient $\mathbb{D}$, et si $f(x)$ admet une limite A quand $x \to 1$ en restant dans $]0,1[$, on dit que la série $\sum a_n$ *converge au sens d'Abel* ; le nombre A est alors appelé *somme d'Abel* de la série.

Q11. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de nombres complexes, et $\sum c_n$ leur produit de Cauchy. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent au sens d'Abel, montrer qu'il en est de même pour $\sum c_n$. Quelle formule relie leurs sommes d'Abel ?

Q12. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente (au sens usuel). Montrer qu'elle converge au sens d'Abel, et que sa somme d'Abel est égale à sa somme usuelle $\sum_0^\infty a_n$.

Q13. Dans cette question, on suppose seulement que la série $\sum a_n$ est convergente au sens de Cesàro, sa somme de Cesàro valant S.

(1) En notant
$$\sigma_n = \frac{1}{n}(s_0 + \cdots + s_{n-1}),$$
montrer que $f(z)$ est bien définie pour $z \in \mathbb{D}$, et que
$$f(z) = (1-z)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\sigma_{k+1} z^k.$$

(2) Soit $(\epsilon_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombre complexes tendant vers zéro. Montrer que
$$\lim_{x\to 1,\, x\in]0,1[} (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\epsilon_{k+1} x^k = 0.$$

(3) En déduire que $\sum a_n$ converge au sens d'Abel, et calculer sa somme d'Abel.

Q14. Montrer que la série $\sum (-1)^n n = 0 - 1 + 2 - 3 + \cdots$ est convergente au sens d'Abel, mais pas au sens de Cesàro. Calculer sa somme d'Abel.

Q15. On reprend les notations de **Q5**. Montrer que si l'une des deux séries $\sum a_n$ et $\sum d_n$ converge au sens d'Abel, alors l'autre aussi, et leurs sommes d'Abel respectives sont liées par la formule $A(\mathbf{a}) = A(\mathbf{d}) + a_0$.

Q16. Sans utiliser la définition de la convergence au sens d'Abel, mais en utilisant la linéarité de l'application $\mathbf{a} \mapsto A(\mathbf{a})$, ainsi que le résultat de la question **Q4**, retrouver la valeur de la somme d'Abel de la série $\sum (-1)^n n$.

5. Un théorème Taubérien

Dans cette partie, on considère une série $\sum a_n$, convergente au sens d'Abel, de somme d'Abel A. La fonction f est définie comme à la section 4.

Q17. Soit $N \geqslant 1$ un entier et $x \in]0,1[$. Montrer que
$$\left| \sum_{k=0}^{N} a_k - f(x) \right| \leq (1-x) \sum_{k=1}^{N} |k a_k| + \frac{1}{N(1-x)} \sup_{n>N} |n a_n|.$$

Q18. On suppose de plus que
$$\lim_{n\to+\infty} n a_n = 0.$$
Montrer que la série $\sum a_n$ converge (au sens usuel) et calculer sa somme.

⋆ ⋆
⋆