

Rapport sur l'épreuve de mathématiques D, ENS filière MP (2014)

Philippe Gille (concepteur), Jérémy Daniel, Tony Ly,
Pierre Millien, Vianney Perchet (correcteurs)

L'épreuve de 6h de mathématiques de la session 2014 portait sur le groupe symétrique et le groupe des matrices monomiales. Il s'agit d'un thème classique d'algèbre issu de la théorie des systèmes de racines, voir par exemple Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4-6.

Comme à l'accoutumée, le sujet était long, et les deux dernières parties V et VI plus difficiles étaient destinées aux candidats ayant surpassé les quatre premières où la seule question difficile était III.3, ce fait étant d'ailleurs signalé au début du sujet.

Passons en revue le sujet. La partie I développe la structure d'ordre sur l'ensemble des partitions d'un ensemble fini Ω_n à n éléments. Elle permet dans la partie II de considérer les orbites (notion hors programme) d'une action d'un groupe fini H sur Ω_n comme la partition la moins fine qui est stabilisée par H . Ceci permet en particulier de donner une démonstration de la décomposition d'une permutation en cycles disjoints.

La partie III se propose de déterminer quelles partitions de Ω_n donnent lieu à des sous-groupes maximaux du groupe symétrique S_n ; c'est l'occasion de signaler que la classification des sous-groupes maximaux des groupes symétriques est connue mais n'a été achevée qu'assez récemment.

La partie IV concerne le groupe des matrices monomiales de taille n , c'est-à-dire le sous-groupe G_n de $GL_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices qui n'ont sur chaque ligne et chaque colonne qu'un seul coefficient non nul. Ce groupe a une caractérisation intrinsèque, il consiste en les $g \in GL_n(\mathbb{C})$ appliquant par conjugaison chaque matrice diagonale sur une matrice diagonale. La fin de cette partie consistait en un résultat de conjugaison pour les couples "de Kummer" (X, Y) , c'est-à-dire les couples de matrices X, Y de taille n satis-

faisant $X^n = I_n$, $Y^n = I_n$ et $XY = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)YX$; une application est le fait que tout automorphisme de l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ est intérieur.

Le but du sujet était atteint dans la partie V, à savoir qu'un sous-groupe fini Γ de $GL_n(\mathbb{C})$, tel que son sous-groupe engendré par les commutateurs consiste en des homothéties, est conjugué à un sous-groupe de G_n . C'est un cas particulier d'un théorème de Borel-Mostow sur les algèbres de Lie semi-simples (Annals Math., 1955).

Faisant le lien avec la partie IV, la partie VI traitait du cas particulier du sous-groupe engendré par un couple de Kummer (appelé aussi sous-groupes Theta ou d'Heisenberg) et les caractérisait dans le cas où n est un nombre premier.

Remarques:

(a) En I.3.a, “relation d'ordre partiel” signifie “relation d'ordre”, c'est le sens le plus employé. Dans d'autres références, “relation d'ordre partiel” signifie “relation d'ordre qui n'est pas totale”. Heureusement, cette ambiguïté était levée avec la question I.3.b et avec le cas $n = 1$ où la relation d'ordre est de façon évidente totale. Les candidats n'ont donc pas été mis en difficulté par cette ambiguïté terminologique qu'ils ont signalée le cas échéant.

(b) Presque tous les résultats à démontrer figuraient dans les énoncés ; les exceptions I.4, II.8.b n'étaient pas préjudiciables à la poursuite de l'épreuve pour le candidat qui n'aurait pas trouvé la bonne réponse.

D'une façon générale, les candidats ont assez bien réussi avec la partie combinatoire de l'épreuve, à savoir l'étude des partitions et du groupe symétrique. En revanche, les réponses apportées aux questions d'algèbre linéaire ont été dans l'ensemble décevantes, notamment la question II.8. Le jury insiste sur les quelques points suivants :

- (1) Éviter les raisonnements par équivalence, c'est-à-dire toujours établir séparément chaque implication.
- (2) Ne pas abuser outre mesure des raisonnements par l'absurde.
- (3) Bien distinguer les inclusions des inclusions strictes.
- (4) Vérifier que les objets sont toujours bien définis : par exemple lorsque l'on considère une intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$, on doit justifier que I est non vide.
- (5) Une phrase telle que “Il est clair d'après la question précédente que le résultat vaut” n'apporte jamais de point.

(6) Ne pas laisser de brouillons non raturés dans les copies et utiliser plutôt les feuilles de brouillon. Toujours au niveau de la présentation, numéroter et rendre ses feuilles dans l'ordre évitera de mettre inutilement à l'épreuve l'attention des correcteurs.

Du point de vue de la présentation, la concision et la précision ont été appréciées. A titre indicatif, la meilleure copie comporte 16 pages. Nous venons au détail des questions.

Partie I

Question 1 : Un ensemble se distingue de ses éléments.

Question 3.a : Des dénominations farfelues ont été données aux différentes propriétés à observer ; rappelons qu'une relation d'ordre se doit d'être réflexive, antisymétrique et transitive.

Partie II

Question 1.a : Si l'énoncé note la transposition (a, b) , il est préférable de ne pas changer la notation (surtout si la nouvelle notation n'est pas explicitement définie dans la copie du candidat!).

Question 1.b : Un isomorphisme de groupes doit *a minima* être un morphisme de groupes, et non juste une bijection ensembliste.

Question 7.a : Un homomorphisme (ou morphisme, les deux termes désignent la même notion) de groupes n'est pas un morphisme d'algèbres ! Encore moins si la source est le groupe symétrique. On rappelle qu'un morphisme de groupes doit être compatible avec la loi interne et envoyer neutre sur neutre.

Question 8.b : Dans l'espace des matrices carrées de taille n , la matrice identité est annulée par le polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{k=1}^n (X - k)$.

Le candidat se persuadera que, hormis dans le cas $n = 1$, P n'est ni son polynôme caractéristique, ni son polynôme minimal.

Partie III

Question 1 : Certains candidats pensent qu'il y a des sous-groupes de G (contenant H) de tout cardinal inférieur à celui de G (on pensera à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour se convaincre du contraire) ; d'autres pour tout cardinal divisant celui de G (la suite de la partie donne des exemples du contraire).

Partie IV

Question 2.a : Une bonne partie des candidats a justifié que le sous-groupe des matrices diagonales commutait avec toutes les autres, tout en contredisant par là la question 1... Un peu de lucidité, voyons!

Question 5 : Cette question d'algèbre linéaire a été abordée par très peu de candidats, ce qui est bien dommage.

Partie VI

Question 1 : Le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ engendré par deux matrices inversibles A et B n'a a priori aucune raison d'être constitué uniquement des éléments de la forme $A^i B^j$.