Rapport sur l'oral de Mathématiques 2014

Oral spécifique E.N.S. Paris : Olivier Schiffmann
Oral commun Paris-Lyon-Cachan-Rennes : David Gérard-Varet, Vincent Minerbe, Filippo Santambroggio.

1 Commentaires sur le déroulement des épreuves

Nous souhaitons ici faire quelques remarques générales sur le déroulement des épreuves. Bien que de bon sens, ces remarques restent peu prises en compte par bon nombre de candidats.

- Un but essentiel de l'oral est de juger de la capacité du candidat à analyser un problème. Comprendre où se situe la difficulté, faire des parallèles avec d'autres problèmes déjà connus, discuter du problème dans des cas particuliers pertinents est très apprécié. A ce titre, prendre quelques minutes pour étudier l'énoncé, sans se lancer tambour battant dans des calculs, peut être une bonne option.
- Le jury constate encore une certaine forme de bluff chez quelques candidats: flot incessant de paroles, saut précipité des prémisses à la conclusion d'un raisonnement pour en masquer les failles, emploi intempestif de l'expression "c'est trivial" ou "c'est clair". Ce type d'attitude est hautement contre-productif. Dans le même registre, le jury remarque aussi que plusieurs candidats ont tendance à évoquer des notions qu'ils savent très bien appeler par leur nom, mais qui ne semblent pas associées à une idée contribuant à la résolution du problème. Par exemple, cela ne sert à rien de dire "on va résoudre ce problème sur les fonctions convexes par le lemme des trois pentes", sachant que ce lemme est une reformulation de la définition, si le candidat n'a pas une idée de comment cette notion devrait aider dans la preuve. Le slogan "on va raisonner par analyse-synthèse" est souvent employé en recours, pour masquer un manque d'idées.
- A contrario de la remarque précédente, trop de candidats restent muets dès lors qu'ils ne trouvent pas directement la réponse à la question posée. Rappelons ici que le niveau des oraux d'ENS étant élevé, les exercices nécessitent en général un raisonnement long et progressif. Le jury en a pleinement conscience, et attend du candidat qu'il lui montre son aptitude à raisonner, même si ce raisonnement est incomplet.
- La capacité du candidat à faire preuve d'initiative est grandement appréciée. En particulier, l'aptitude du candidat à juger qu'une piste est mauvaise, et se relancer sur une autre voie contribue à améliorer la note.
- L'aptitude à simplifier un problème, par exemple en montrant que le cas général peut se ramener à un sous-cas est perçue très positivement par le jury. De plus, elle permet concrètement de venir à bout de nombreux exercices.

- La prestation d'un candidat est jugée sur toute la durée de l'épreuve. Un mauvais début d'oral ne disqualifie pas le candidat, et celui-ci est invité à rester combatif et positif, d'autant plus que ce type d'attitude est nécessaire au métier de chercheur auquel forment les ENS. Par ailleurs, la perception qu'a le candidat de sa prestation est souvent fausse, en particulier parce qu'elle n'intègre pas les prestations des autres candidats. Cette dernière remarque doit là encore inciter le candidat à rester concentré jusqu'au bout.

- Enfin, une remarque évidente voire déplacée : il est bon de maîtriser son cours. Certains candidats sont incapables de produire un énoncé vraisemblable du théorème de Cauchy-Lipschitz, ou alors d'expliquer pourquoi une matrice symétrique réelle est diagonalisable.

2 Exemples d'exercices et commentaires

Exercice

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty((0,1);\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in (0,1)$ il existe un entier n (à priori dépendant de x) tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que f est un polynôme.

Commentaire. Cet exercice (plutôt difficile) est typique : son énoncé est court et intuitif, et on peut envisager de nombreuses approches pour le résoudre. Il permet au jury de tester l'imagination des candidats ainsi que leur capacité à creuser dans une direction, puis éventuellement à en essayer une autre si celle-ci ne semble pas déboucher.

Exercice

On se place dans l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^n$.

i) Quel est le cardinal maximal d'une famille de points équidistants les uns des autres ? Comment construire toutes ces familles maximales ?

ii) Quel est le cardinal maximal d'une famille de droites (vectorielles) dont les angles deux à deux sont tous égaux ?

Commentaire. Le jury a été très surpris de la grande difficulté qu'ont eu la plupart des candidats pour résoudre le i), et même d'en intuiter la solution. La plupart des candidats ont ainsi eu beaucoup de mal à traduire la condition d'équidistance en termes d'algèbre linéaire (via la matrice de Gram), ainsi qu'à transformer leur intuition géométrique en une construction rigoureuse d'une famille maximale.

La question ii) est ... un problème encore ouvert de nos jours ! Le but est ici de permettre au jury de mesurer, en plus de l'aptitude du candidat à traduire un problème de géométrie vectorielle en un énoncé algébrique, sa capacité à se placer dans des cas particuliers (dimension deux, trois), à intuiter une borne (ce qu'un candidat a remarquablement bien fait), etc. Le jury a, dans un second temps, proposé au candidat de prouver qu'une famille maximale de telles droites est de cardinal au plus $\binom{n+1}{2}$.

Exercice. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $f \in V$ non nul il existe $u \in [0,1]$ tel que $f(u) > 0$. Montrer qu'il existe un polynôme P strictement positif sur $[0,1]$ tel que

$$\int_0^1 f(x)P(x)dx = 0 \qquad \forall f \in V.$$

Commentaire. Cet exercice (difficile) s'est révélé assez déroutant pour la plupart des candidats. Le jury a particulièrement apprécié le fait de chercher à comprendre le problème dans des cas particuliers plus simples (comme le cas où $dim\ V = 1$ (!), non totalement dépourvu d'intérêt, et faisant par exemple apparaitre la pertinence de la notion de convexité et d'énoncés du type 'Lemme de Carathéodory' , en général bien connu des candidats).

Exercice.

Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ continue et dérivable, et telle que $\int_0^\infty f^2(x)dx < \infty$. Montrer que la fonction

$$g(x) := f(x) - 2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$$

vérifie $\int_0^\infty g^2(x)dx = \int_0^\infty f^2(x)dx$.

Commentaire. Cet exercice a été bien analysé et bien traité par la plupart des candidats, qui ont su traduire la relation définissant la fonction g en une relation différentielle, pour se ramener à montrer que $\lim_{w\to\infty} e^{-2w}\int_0^w e^t f(t)dt = 0$. La plupart des candidats ont également pensé à appliquer des majorations différentes à cette dernière intégrale sur les intervalles $]0, w/2[$ et $]w/2, w[$.

Exercice.

Soit A une $\mathbb{Z}$-algèbre unitaire commutative, engendrée par des éléments $x_1, \ldots, x_r$. On suppose également que A est $\mathbb{Z}$-graduée, i.e. A se décompose en une somme directe de sous $\mathbb{Z}$-modules

$$A = \bigoplus_{i,\in\mathbb{Z}} A_i$$

vérifiant $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$ pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$. Enfin, on suppose que les éléments $x_1, \ldots, x_r$ sont homogènes, i.e. que pour tout $i = 1, \ldots, r$ il existe $d(i) \in \mathbb{Z}$ tel que $x_i \in A_{d(i)}$.

i) Montrer que A_0 est une sous-algèbre et qu'elle est engendrée par un nombre fini d'éléments.

ii) Que se passe-t-il si on remplace la $\mathbb{Z}$-graduation de A par une $\mathbb{Q}$-graduation ? Une $\mathbb{R}$-graduation ?

Commentaire. Ce problème n'a été posé qu'en deuxième partie d'oral, à des candidats ayant très bien réussi un premier exercice. L'énoncé se veut délibérément déstabilisant mais les candidats ont en général rapidement intégré la notion d'algèbre graduée. Le jury a cherché à aiguiller les candidats afin de les diriger vers l'énoncé fondamental ici (qui est qu'un cône strictement convexe de $\mathbb{Z}^r$ est finiment engendré comme monoide), la démonstration de cet énoncé (ou la partie ii), canulesque) n'étant que la cerise sur le gâteau.

Exercice.

Soit $X \subset \mathcal{M}^{n\times n}$ le sous-ensemble des matrices carrées complexes $n \times n$ défini par

$$X = \{A \,:\, A^m = Id\}.$$

Calculer le nombre de composantes connexes par arcs de X.

Commentaire. L'exercice a été traité de manière très inégale par les candidats. Il comportait en gros quatre parties : reconnaître ce que devraient être les composantes connexes par arcs, prouver qu'elles sont bien connexes (ce qui se base sur la connexité de $GL(n, \mathbb{C})$), prouver qu'elles sont distinctes les unes des autres, et les compter. Ces deux dernières parties étaient moins standard pour les candidats, alors que la deuxième l' était plus pour plusieurs d'entre eux. La première partie demandait une certaine autonomie, mais certains candidats ont su faire preuve d'inventivité.

Exercice.

Démontrer que toute fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne. Démontrer qu'une fonction convexe est différentiable en tout point si et seulement si elle est $\mathcal{C}^1$.

Commentaire.

On remarque que la première partie (sans doute plus difficile que la deuxième) sert à montrer que les gradients sont localement bornés, ce qui permet d'utiliser un argument de compacité pour traiter la deuxième partie. Cependant, des candidats n'ont pas réellement saisi le sens de la deuxième partie, ne connaissant pas d'exemple de fonctions différentiables en tout point mais non $\mathcal{C}^1$. L'exercice était beaucoup plus simple sous l'hypothèse additionnelle que f soit continue, ce que certains candidats trouvaient évident. Or cela était bien vrai, mais faisait partie de la question.

Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $F \,:\, [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^2 avec $F'(1) > 0$ et $F'' \leq 0$. On suppose que $u \,:\, [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution C^2 et bornée de l'équation

$$-u'' - \frac{F'}{F}u' + \frac{n^2}{F^2}u = 0.$$

1. Que dire si $n = 0$?

2. Supposons $n \geq 1$ et F bornée. Montrer que u tend vers 0 en $+\infty$.

Commentaire. L'exercice nécessite, d'une part, de bien comprendre le comportement asymptotique de la fonction F (par des considérations très élémentaires mais non immédiates pour beaucoup de candidats), puis de combiner cette information avec l'équation pour étudier u : c'est facile à la première question, plus technique à la seconde (les meilleurs candidats ont compris que le comportement de u devrait être comparable à celui de l'équation asymptotique obtenue essentiellement en remplaçant F et F' par leurs limites).

Exercice.

1. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien tel que $|\det u| = 1$ et $\|u\| = 1$. Que dire de u ? Interprétation géométrique ?

2. Que dire si $|\det u| \geq 1 - \epsilon$ et $\|u\| \leq 1 + \epsilon$ pour $\epsilon > 0$ petit ?

3. Soit $(e_i)_i$ une base orthonormée. Que dire si, pour $\epsilon > 0$ petit, on a $\|u\| \leq 1 + \epsilon$ et $\|u(e_i)\| \geq 1 - \epsilon$ pour chaque i ?

Commentaire. Cet exercice ne semble pas si difficile, et pourtant il a été mal traité, dans l'ensemble. La première question est standard, mais l'interprétation géométrique du déterminant a posé problème. Dans la suite, on attend du candidat qu'il dise que l'endomorphisme est "presque" une isométrie, qu'il est proche d'une isométrie, en adaptant l'argument précédent. Mais ce n'est pas maîtrisé et certains pensent même qu'une presque-isométrie est forcément une isométrie...