

Composition de Mathématiques, Filière PC  
(XEULC)

Rapport de MM. Stéphane ATTAL, Frédéric BERTRAND et  
Pierre DEHORNOY, correcteurs.

Les notes des candidats français se répartissent selon les données du tableau suivant :

$0 \leq N < 4$	86	6,22 %
$4 \leq N < 8$	546	39,48 %
$8 \leq N < 12$	521	37,67 %
$12 \leq N < 16$	188	13,59 %
$16 \leq N \leq 20$	42	3,04 %
Total	1383	100 %
Nombre de copies : 1383		
Note moyenne : 8,73		
Écart-type : 3,39		

## Commentaires généraux

Le sujet portait sur l'étude des intégrales à phases réelle et complexe. Il était clair, bien écrit et le découpage des questions adapté à leur difficulté. Les résultats n'ont pourtant pas été à la hauteur.

De manière générale, les candidats doivent faire un effort important pour énoncer les théorèmes et vérifier toutes leurs hypothèses : toutes les fonctions ne se prêtent pas aux intégrations par parties, il n'est pas possible d'invertir limite et intégrale pour toutes les suites de fonctions, etc.

Concernant la présentation des copies. Nous avons vu une explosion du nombre de copies très mal écrites, voire illisibles, raturées sur des pages entières, sans rédaction, sans phrase, uniquement avec des symboles mathématiques. On se moque du correcteur, c'est inacceptable ! On le répète chaque année, la copie est un endroit où l'on rend un résultat propre, abouti, réfléchi et rédigé. Ce n'est pas une feuille de brouillon ! Nous en avons tenu compte dans la notation cette année, suite à l'augmentation du nombre de copies de ce genre, nous continuerons à en tenir compte de manière très importante dans les prochains concours.

Un manque de précision dans la rédaction, l'absence de quantificateurs aux passages cruciaux des démonstrations par exemple, est également à déplorer. Il est important de

bien mettre en évidence les points clés d'une démonstration (nom d'un théorème, hypothèse importante utilisée, etc), en les entourant par exemple. C'est plus important que d'entourer la solution elle-même (que le correcteur connaît) et cela détermine pour le correcteur la compréhension ou non de la question par le candidat.

Concernant la stratégie, c'est en faisant avec soin les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on gagne réellement des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. On peut dire sans exagérer qu'environ 75% des candidats font le même lot de questions, avec plus ou moins de bonheur. Les candidats qui font vraiment la différence sont ceux qui font deux ou trois questions plus difficiles, plus longues, où il y a un raisonnement en 2 ou 3 étapes à faire. Et là ce sont des différences de 5 points que l'on peut alors voir facilement.

La qualité de la présentation et de la rédaction était notée sur 2,5 points. Passons maintenant au détail, question par question.

## I. Intégrales à phase réelle

Cette partie I, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 7,0 points.

**1 a)** Cette première question a été correctement traitée par la plupart des candidats ayant suivi l'indication donnée dans le sujet et introduit la bonne fonction  $g_t$ . La justification de l'interversion limite et intégrale n'a, quant à elle, été justifiée correctement que dans peu de copies, de nombreux candidats ne décelant même pas cette difficulté. La vérification des hypothèses du théorème d'interversion a souvent été partielle, l'hypothèse de domination étant la plus fréquemment oubliée.

**1 b)** L'énoncé suggérait au candidat de procéder de manière similaire qu'à la question **1 a)**. Sans surprise, la réussite à cette question a été fortement corrélée à celle à la question précédente.

**2 a)** Cette question a été correctement traitée par la plupart des candidats en démontrant généralement que  $\Phi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de  $[a, b]$  sur  $[\Phi(a), \Phi(b)]$  puis en remarquant que  $\Phi(a) = 0$ .

**2 b)** L'équivalent demandé s'obtient en se ramenant au contexte de la question **1 a)** en posant le changement de variable  $y = \Phi(x)$ . Toutefois, le théorème du changement de variable doit être énoncé correctement ainsi que ses hypothèses vérifiées, ce que permet de faire la question **2 a)** et l'hypothèse  $f(a) \neq 0$ .

**3 a)** Il ne faut pas oublier de commencer par montrer que  $\psi$  est bien définie sur  $[a, b]$ , ce que trop de candidats ont oublié de faire. Les théorèmes généraux permettaient de montrer le caractère  $\mathcal{C}^1$  de  $\psi$  sur  $]a, b]$ . La justification du caractère  $\mathcal{C}^1$  de  $\psi$  en  $a$ , ainsi que le calcul de  $\psi'(a)$ , a posé de réels problèmes à une grande majorité de candidats alors qu'il

suffisait, par exemple, de faire un développement limité en  $a$  puis d'appliquer le théorème limite de la dérivée.

**3 b)** Cette question a été correctement traitée par la plupart des candidats.

**3 c)** L'équivalent demandé s'obtient en se ramenant au contexte de la question **1 b)** en posant le changement de variable  $y = \psi(x)$ . Toutefois, le théorème du changement de variable doit être énoncé correctement ainsi que ses hypothèses vérifiées, ce que permet de faire les questions **3 a)** et **3 b)** ainsi que l'hypothèse  $f(a) \neq 0$ .

**4 a)** Il suffisait de procéder à une démonstration par récurrence. Ne pas oublier de procéder en trois temps : fondement, hérédité et conclusion. Cette question a été correctement traitée par la plupart des candidats et fait partie des résultats à savoir retrouver facilement.

**4 b)** La réécriture de  $\Gamma(n + 1)$  sous la forme proposée dans l'énoncé n'a été justifiée que dans très peu de copies alors qu'il suffisait de faire le changement de variable bijectif linéaire, donc licite,  $x = ny$ . Une majorité de candidats a déduit l'équivalent à partir de la réécriture proposée dans le sujet et du Résultat 1 qui y est énoncé. Il est à regretter que la vérification des hypothèses de ce résultat n'a souvent été que partielle. Il faut que les candidats comprennent que, puisque le résultat à obtenir figurait dans le sujet, cette vérification constituait le coeur de la réponse qu'ils devaient apporter à cette question.

## II. Fonctions périodiques

Cette partie II, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 9,2 points.

**5 a)** Cette question porte sur une propriété classique des séries de Fourier d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Elle a heureusement été correctement traitée par la quasi totalité des candidats, enfin ceux qui savent quelles sont les hypothèses à vérifier pour procéder à une intégration par parties.

**5 b)** De manière extrêmement surprenante, cette question n'a été correctement traitée que dans très peu de copies. Elle repose sur l'application de l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ , valable pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , au module du résultat obtenu à la question **5 a)** pour se ramener à une majoration par deux séries : la série de Riemann convergente  $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} 1/n^2$  et la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi')|^2$  qui converge d'après la formule de Parseval appliquée à  $\phi'$  qui est  $2\pi$ -périodique et continue puisque  $\phi$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**5 c)** Peu de candidats ont réussi à démontrer le résultat demandé alors qu'il suffisait de faire le raisonnement suivant.  $\phi$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$  donc la série de Fourier de  $\phi$  converge normalement vers  $\phi$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons  $|\phi(x)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)e^{inx}| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)|$ . D'où  $\|\phi\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)|$ .

**6 a)** Cette question difficile n'a été entièrement traitée que par une toute petite minorité de candidats. La fonction  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ , donc la série de

Fourier de  $\psi$  converge normalement vers  $\psi$ . En injectant cette décomposition de  $\psi$  dans la définition de  $J_\epsilon$  puis en utilisant la convergence normale pour intervertir série et intégrale, il est alors possible de procéder à une intégration par parties d'où découle l'inégalité recherchée.

**6 b)** De nombreuses copies ont admis la question précédente et en ont déduit la limite demandée.

**7 a)** Cette question a été maltraitée par de nombreux candidats qui ignorent la définition de la partie entière.

**7 b)** Les passages abusifs à la limite dans la borne de l'intégrale ont été légion. De même de trop nombreux candidats donnent des valeurs limites de l'intégrale lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 qui dépendent encore de  $\epsilon$  !

**7 c)** Cette question, reposant sur une application directe de l'inégalité des accroissements finis, a été correctement traitée par une majorité de candidats.

**7 d)** Les calculs n'ont malheureusement pas abouti dans une majorité de copies. La transformation demandée résulte du changement de variable  $y = x/\epsilon$ , linéaire donc licite, et de la  $2\pi$ -périodicité de la fonction  $\psi$ .

**7 e)** Les calculs n'ont malheureusement abouti que dans un nombre de copies encore plus réduit qu'à la question **7 d)**. Il suffisait de commencer par appliquer l'inégalité triangulaire au membre de gauche puis **7 c)** et à nouveau, comme en **7 d)**, le changement de variable  $y = x/\epsilon$ , linéaire donc licite, et de la  $2\pi$ -périodicité de la fonction  $\psi$  et enfin de remarquer que  $\epsilon N_\epsilon \leq (b - a)/2\pi$ .

**7 f)** Cette limite n'a été justifiée que par une faible minorité de candidats. Il convenait de découper  $J_\epsilon$  ainsi  $J_\epsilon = \int_a^{x_{N_\epsilon}} \psi(x/\epsilon) f(x) dx + \int_{x_{N_\epsilon}}^b \psi(x/\epsilon) f(x) dx$ . Par **7 b)**, le dernier terme tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0. Le premier terme se décompose lui-même à nouveau ainsi :

$$\int_a^{x_{N_\epsilon}} \psi(x/\epsilon) f(x) dx = \sum_{k=0}^{N_\epsilon-1} \int_{x_k^\epsilon}^{x_{k+1}^\epsilon} \psi(x/\epsilon) f(x) dx + \sum_{k=0}^{N_\epsilon-1} \int_{x_k^\epsilon}^{x_{k+1}^\epsilon} \psi(x/\epsilon) (f(x) - f(x_k^\epsilon)) dx.$$

Par **7 e)**, le dernier terme tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0 et par **7 d)** le premier terme se transforme ainsi  $\sum_{k=0}^{N_\epsilon-1} \int_{x_k^\epsilon}^{x_{k+1}^\epsilon} \psi(x/\epsilon) f(x) dx = (\int_0^{2\pi} \psi(y) dy) (\epsilon \sum_{k=0}^{N_\epsilon-1} f(x_k^\epsilon))$ . On reconnaît alors dans le terme  $\epsilon \sum_{k=0}^{N_\epsilon-1} f(x_k^\epsilon)$  une somme de Riemann associée à la fonction continue  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  (à un coefficient  $2\pi$  près) d'où  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi \epsilon \sum_{k=0}^{N_\epsilon-1} f(x_k^\epsilon) = \int_a^b f(x) dx$  puis la limite demandée.

**8 a)** De manière très surprenante cette question n'a finalement été bien traitée que par une petite majorité de candidats alors qu'il s'agissait d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, non homogène, avec un second membre continu. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire permettait alors d'affirmer l'existence d'une unique solution définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

**8 b)** Si la détermination de la solution homogène a été menée avec succès dans une grande majorité des copies, celle de la solution particulière, et encore plus celle de la solution générale avec utilisation des conditions initiales, a posé beaucoup de problèmes aux candidats. Pour la solution particulière, la méthode de variation de la constante permettait de trouver la solution particulière  $\int_0^t g(s/\epsilon) \sin(t-s) ds$ . La solution générale  $u_\epsilon$  satisfaisant les conditions initiales  $u_\epsilon(0) = a = \alpha$  et  $u'_\epsilon(0) = b = 0$  est : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u_\epsilon(t) = \alpha \cos(t) + \int_0^t g(s/\epsilon) \sin(t-s) ds$ .

**8 c)** L'existence de cette limite n'a été prouvée que par une poignée de candidats. Il en va de même pour son calcul. De la question **8 b)**, il résulte que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u_\epsilon(t) = \alpha \cos(t) + w(t)$  où  $w(t)$  est une intégrale de la forme  $J_\epsilon$ . Les hypothèses de la question **7 f)** sont remplies avec, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\psi(x) = g(x)$  et  $f(x) = \sin(t-x)$ . La valeur de la limite est :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(t) = \alpha \cos(t) + (1/(2\pi) \int_0^{2\pi} g(x) dx)(1 - \cos(t))$ .

### III. Intégrales oscillantes

Cette partie III, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 6,3 points. Elle n'a été abordée que par une très faible portion de candidats.

**9 a) i.** Il est regrettable qu'autant de candidats ne sachent pas résoudre proprement une équation différentielle d'ordre 1. En effet, la condition  $Lg = g$  se traduit par le fait que  $g$  est solution d'une équation différentielle homogène linéaire scalaire d'ordre 1 à coefficients de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dont la forme générale des solutions est, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = ke^{i\lambda\phi(x)}$ .

**9 a) ii.** Il suffisait de procéder à une intégration par parties, en vérifiant que les conditions d'utilisation de celle-ci sont bien remplies, puis d'utiliser le fait que  $h$  soit à support compact dans  $]a, b[$  pour éliminer la variation  $[g(x)h(x)/(i\lambda\phi'(x))]_a^b$ .

**9 b)** Seuls quelques candidats ont traité cette question. Une récurrence simple permettait d'appliquer de manière répétée le résultat de la question **9 a) ii.** et d'obtenir la majoration demandée.

**10 a)** Très peu de copies abordent cette question. Encore une fois, une intégration par parties apporte la solution :  $\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx = [e^{i\lambda\phi(x)}/(i\lambda\phi'(x))]_a^b + 1/(i\lambda) \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \phi''(x)/\phi'(x)^2 dx$ .  $\phi'$  est monotone sur  $[a, b]$ , supposons par exemple  $\phi'$  croissante sur  $[a, b]$  (la preuve est similaire si  $\phi'$  est décroissante). Alors  $\phi'' \leq 0$  sur  $[a, b]$ , donc  $|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \phi''(x)/\phi'(x)^2 dx| \leq \int_a^b \frac{\phi''(x)}{\phi'(x)^2} dx = 1/\phi'(a) - 1/\phi'(b)$ . De plus,  $|\phi'| \leq 1$ , donc on en déduit que :  $|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx| \leq 4/\lambda$ .

**10 b)** Encore moins de candidats traitent cette question-ci. La démonstration de la formule précédente s'adapte dans difficulté pour obtenir l'inégalité :  $|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx| \leq c_1/(\delta\lambda)$  avec  $c_1 = 4$ .

**11 a)** Question un peu plus souvent abordée, mais trop de candidats ne justifient pas le

passage de  $\phi$  à  $|\phi|$ . Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que  $\phi'$  est strictement monotone sur  $[a, b]$ .  $|\phi'|$  est continue sur  $[a, b]$ , puisque  $\phi'$  l'est, d'où l'existence du minimum de  $|\phi'|$  sur  $[a, b]$ . L'unicité s'obtient en distinguant les cas  $\inf_{x \in [a, b]} |\phi'(x)| = 0$  et  $\inf_{x \in [a, b]} |\phi'(x)| \neq 0$ .

**11 b)** Une portion minime des copies a traité cette question. à nouveau le résultat s'obtient en distinguant les cas  $\inf_{x \in [a, b]} |\phi'(x)| = 0$  et  $\inf_{x \in [a, b]} |\phi'(x)| \neq 0$ .

**11 c)** Une infime fraction des candidats a traité cette question. Pour  $\delta > 0$  assez petit et  $c \neq a, b$ , l'intégrale se découpe en trois parties :  $\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx = \int_a^{c-\delta} e^{i\lambda\phi(x)} dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{i\lambda\phi(x)} dx + \int_{c+\delta}^b e^{i\lambda\phi(x)} dx$ . **11 b)** permet d'affirmer que sur  $[a, c - \delta]$  et  $[c + \delta, c]$ , l'inégalité  $|\phi'(x)| \geq |x - c| \geq \delta$  est vérifiée. par conséquent, le premier et le troisième termes se majorent à l'aide du résultat trouvé à la question **10 b)** et la valeur absolue de leur somme est inférieure ou égale à  $2c_1(\lambda\delta)^{-1/2}$ . Pour le second terme, d'utiliser l'inégalité de la moyenne : sa valeur absolue est inférieure à  $\int_{c-\delta}^{c+\delta} |e^{i\lambda\phi(x)}| dx \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} 1 dx \leq 2\delta$ . D'où la majoration demandée.

**11 d)** Une plus petite partie encore des candidats a abordé cette question. En prenant  $\delta = \lambda^{-1/2}$ , on obtient le résultat recherché avec  $c_2 = 2c_1 + 2$ .

**11 e)** Une portion microscopique des candidats a traité cette dernière question. Une intégration par parties puis l'application du résultat de la question **11 d)**, en remarquant que la constante  $c_2$  ne dépend pas de l'intervalle d'intégration permet de conclure.