ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2015

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1

Probabilités, polynômes

On considère des dés cubiques. Chaque face d'un dé porte un nombre entier $n \geq 1$, et plusieurs faces du même dé peuvent indiquer le même nombre. Au dé D, dont les faces portent les nombres $n_1, \ldots, n_6$, on associe le polynôme $Q_D \in \mathbb{Z}[T]$ défini par

$$Q_D(T) = T^{n_1} + \cdots + T^{n_6}.$$

Voici deux exemples. Le polynôme du dé usuel U, numéroté de 1 à 6, est $Q_U = T + T^2 + T^3 + T^4 + T^5 + T^6$. Pour un dé dont toutes les faces portent le nombre n, on a $Q_D(T) = 6T^n$.

On suppose que lorsqu'on lance un dé, ses 6 faces sont équiprobables.

1. Exprimer Q_D au moyen des probabilités $\mathbb{P}(x = m)$ d'obtenir m en lançant le dé D. Calculer $Q_D(1)$ et $Q_D(0)$.
2. On lance deux dés D et E, et on suppose que leurs résultats sont indépendants.

   Décrire l'univers Ω et la probabilité associés à cette expérience. Soit S la somme des deux nombres obtenus, qui est donc une variable aléatoire sur Ω. Montrer que

   $$Q_D(T)Q_E(T) = 36 \sum_{\ell \geq 2} \mathbb{P}(S = \ell) T^\ell.$$

3. Développer $(T-1)Q_U(T)$. Montrer que Q_U est le produit de quatre polynômes à coefficients entiers, de degrés un et deux.

   On veut construire deux dés (différents l'un de l'autre) D_1 et D_2, tels que la loi de la somme S, lorsqu'on les lance ensemble avec indépendance, soit la même que lorsqu'on lance deux dés usuels.

4. On note P_k le polynôme associé au dé D_k. Que vaut le produit P_1P_2 ? Quelle factorisation de P_1P_2 peut-on écrire ? Montrer que P_1 et P_2 sont unitaires.
5. Soit $j = e^{2i\pi/3}$ une racine cubique de l'unité. Si $P_k(j) = 0$, montrer que P_k est divisible par le polynôme $T^2 + T + 1$. Montrer que le quotient $P_k(T)/(T^2 + T + 1)$ est un polynôme à coefficients entiers.
6. Montrer que $P_1 = T(T+1)^\alpha(T^2+T+1)^\beta(T^2-T+1)^\gamma$ où α, β et γ sont des entiers entre 0 et 2.
7. En calculant une valeur convenable de P_1, montrer que $\alpha = \beta = 1$.
8. En déduire qu'il existe une et une seule paire (D_1, D_2) de dés ayant la propriété demandée, et décrire cette paire.

Exercice 2

Séries de fonctions, trigonométrie

1. On définit la fonction *cotangente*, de la variable réelle x, par
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$
Quel est son domaine de définition ? Montrer que cette fonction est π-périodique et impaire. Dessiner son graphe sur l'intervalle $]0, \pi[$.

2. Montrer que $\cot(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan x$. En déduire l'équation fonctionnelle
$$\cot \frac{x}{2} + \cot \frac{x+\pi}{2} = 2 \cot x.$$
On posera dorénavant $f(x) = \pi \cot \pi x$.

3. Si $N \geq 1$ est un entier, on définit une fonction g_N de la variable réelle par
$$g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}.$$
Quel est son domaine de définition ? Exprimer $g_N - g_{N-1}$ au moyen d'une seule fraction.

4. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, montrer que la suite $(g_N(x))_{N \geq 1}$ est convergente. On note $g(x)$ sa limite. Si l'intervalle fermé $[a, b]$ est contenu dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, montrer que cette convergence est uniforme sur $[a, b]$. Quelle propriété de g en déduit-on ?

5. Montrer que g est périodique de période 1.

6. Montrer qu'il existe des nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \notin \mathbb{Z}$, on a
$$g_N\left(\frac{x}{2}\right) + g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) - 2g_{2N}(x) = \frac{a}{x + bN + c}.$$
En déduire l'équation fonctionnelle
$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x).$$
Dorénavant, on pose $h = f - g$.

7. Quelles propriétés de h se déduisent naturellement des questions précédentes ?

8. Montrer que
$$\lim_{x \to 0} \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

9. En déduire que
$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0,$$
et que h admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.

Ce prolongement sera encore noté h.

10. Soit $m = \sup_x h(x)$. Montrer que l'ensemble $h^{-1}(m)$ est non vide, et que
$$(h(x) = m) \Longrightarrow (h\left(\frac{x}{2}\right) = m).$$

11. En déduire que $m = 0$, puis montrer l'identité
$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right).$$