ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2015

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche, à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé.

⋆ ⋆ ⋆

Première partie : Questions de culture générale

On donnera des réponses succinctes (trois lignes, maximum), mais claires et précises. Il n'est attendu aucune justification, ni aucune définition des notations employées.

1. Proposer une valeur approchée de la vitesse de la lumière.

2. Définir les conditions de Gauss en optique.

3. Représenter un schéma électrique d'un filtre passe-bas.

4. Énoncer la "loi de modération" de Lenz et indiquer l'équation sur laquelle elle s'appuie.

5. Préciser l'unité d'entropie.

6. Représenter le schéma de principe d'un interféromètre de Michelson.

7. Écrire une équation de diffusion, au choix, mais en précisant la grandeur diffusante.

8. Écrire la relation de Bernoulli en mécanique des fluide en précisant ses conditions d'application.

9. Écrire l'équation de Maxwell-Ampère en électromagnétisme.

10. Écrire l'équation de d'Alembert pour le champ magnétique dans le vide.

Seconde partie : Étude du mouvement collé-glissé

Lorsque deux solides en contact sont en mouvement relatif, sous certaines conditions, il peut apparaitre un mouvement dit collé-glissé : les deux solides peuvent initialement glisser l'un sur l'autre, puis se solidariser, avant de glisser à nouveau, *etc.* Ce phénomène se manifeste fréquemment dans la vie quotidienne. Il est par exemple responsable du crissement d'une craie sur un tableau ou celui des pneus sur le goudron, du grincement des gonds d'une porte, du bruit strident qui peut provenir des freins d'un vélo, ou encore des vibrations entretenues par un archet sur une corde de violon.

Afin d'étudier ce phénomène on considère un patin parallélépipédique de masse m, relié à un mur (fixe !) par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Ce patin est placé sur un tapis roulant qui défile à une vitesse V supposée positive (voir figure 1.a). L'abscisse (selon la direction horizontale) du patin, notée $x(t)$, est mesurée depuis le mur. Pour simplifier les notations, on négligera la longueur du patin par rapport aux autres longueurs du système.

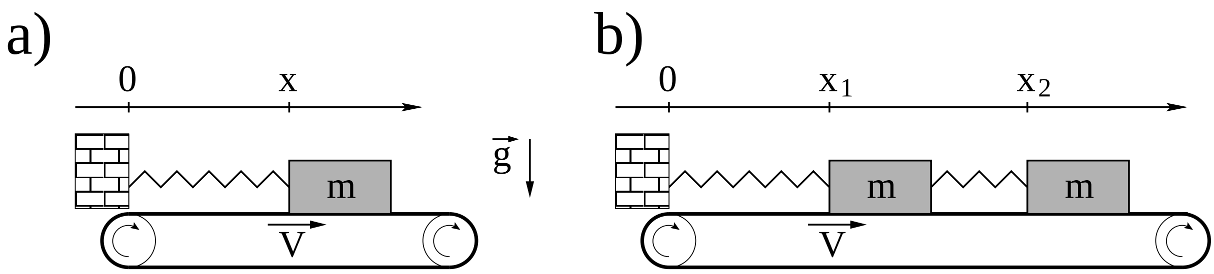

Figure 1 – Modélisation du mouvement collé-glissé par des patins sur un tapis roulant.

Le contact entre le patin et le tapis roulant est décrit par les lois du frottement solide, caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s (supposé constant) et dynamique μ_d (supposé constant). Le mouvement sera dit “collé” si la vitesse de glissement du patin sur le tapis roulant est nulle, et “glissé” sinon.

Nous notons $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur et supposerons, que tout au cours du mouvement, la vitesse $\dot{x}$ du patin n'est jamais supérieure à V.

Considérations générales.

1. D'un point de vue pratique, quelle précaution de montage doit-on prendre pour assurer que l'entraînement du patin par le tapis ne le fait pas basculer ? On considérera cette condition réalisée.

2. Nous définissons les grandeurs suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \omega_0 & = & \sqrt{k/m} \\ \delta_s & = & \mu_s\, g/\omega_0^2 \\ \delta_d & = & \mu_d\, g/\omega_0^2 \end{array}\right. \tag{1}$$

Préciser leur dimension.

3. Nous notons N et T les composantes normale et tagentielle (dans un repère de projection à définir et préciser) de l'action du tapis sur un patin.
Rappeler les lois de Coulomb pour le frottement solide.

4. Dans le cadre de notre étude, illustrer graphiquement la dépendance du coefficient de frottement μ avec la vitesse de glissement v_g du patin par rapport au tapis.

Un seul patin est placé sur le tapis roulant.

5. Initialement, le patin se situe à l'abscisse $x = l_0$ lorsque l'on met en route le tapis roulant. Lors de cette phase de démarrage, la vitesse V_T du tapis suit l'évolution temporelle :

$$V_T(t) = V\,\{1 - \exp(-t/\tau_T)\} \tag{2}$$

À quelle condition, à l'instant de mise en route, la patin demeure-t-il collé au tapis ?

N.B. Nous supposerons désormais que cette phase de démarrage est telle que le glissement n'apparaît que lorsque le tapis a atteint son régime permanent, à la vitesse V.

6. Déterminer, dans ces conditions, l'abscisse x_g du patin lorsqu'il commence à glisser.

N.B. On prendra désormais comme origine des temps, l'instant du début du glissement.

7. Établir que, lors de la phase glissée, le mouvement du patin est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \omega_0^2(l_0 + \delta_d) \tag{3}$$

8. **a)** En déduire qu'il existe une position d'équilibre dont on exprimera l'abscisse x_{eq}.

b) Introduisons alors la variable d'écart à l'équilibre : $X(t) = x(t) - x_{eq}$.
En écrivant les solutions de l'équation différentielle (3) sous la forme :

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\ , \tag{4}$$

exprimer les constantes A et B en fonction de V, δ_d, δ_s et ω_0.

La figure (2) représente la solution de l'équation (4), pour la phase glissée.

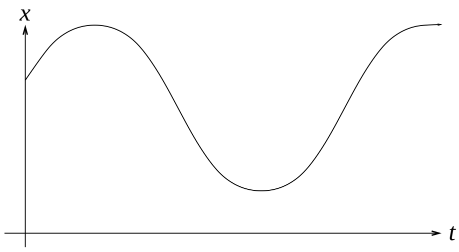

Figure 2 – Mouvement glissé.

9. **a)** Reproduire ce graphique en situant l_0, x_{eq} et x_g.
Y superposer, en correspondance, l'évolution temporelle $x_T(t)$ de l'abscisse d'un point du tapis (que l'on choisira nulle à $t = 0$).

b) À quelle condition sur $\dot{X}$ le mouvement devient-il à nouveau collé ?
Situer sur le graphique, en le justifiant, le point où le patin colle à nouveau.

c) Quelle est alors la nature de la trajectoire dans la phase collée ? La représenter sur le graphique.

d) À quelle condition le patin glisse-t-il à nouveau ? On situera ce point sur le graphique en précisant sa construction.

10. **a)** Montrer alors que l'instant τ pour lequel le patin colle à nouveau au tapis vérifie :

$$\cos\theta - \alpha\sin\theta = 1\ , \tag{5}$$

où $\theta \equiv \omega_0\tau$ et α est une constante à exprimer.

b) Tracer, sur un même graphique, les fonctions $\cos\theta - 1$ et $\alpha \sin\theta$ pour $\alpha = 1$ puis situer les solutions de l'équation (5) (sur $[0,2\pi]$). Faire de même pour les cas $\alpha \ll 1$ et $\alpha \gg 1$.

c) Pour chacun des cas $\alpha \ll 1$ et $\alpha \gg 1$, exprimer la dépendance asymptotique de la solution θ avec α.

d) Représenter l'allure de la dépendance de la solution $\theta = \theta(\alpha)$ avec la paramètre α. Représenter conjointement la dépendance de la vitesse V avec α. On adoptera pour cela le même axe α que celui du tracé précédent, l'axe des vitesses pointant alors vers le bas. À partir de ces deux tracés, constuire dans un troisième cadran celui illustrant la dépendance de θ avec V. On considérera, en particulier, les limites $V \to 0$ et $V \to \infty$.

11. Esquisser alors l'allure de l'évolution $x = x(\omega_0 t)$, sur deux périodes, pour une vitesse V “faible” et une autre “forte”, sur deux graphes distincts (on s'aidera des résultats des questions précédentes). Comment retrouver ces résultats en considérant ces cas limites directement à partir de la solution (4) ?

12. Dans le cas limite du régime purement glissé, exprimer l'énergie E_μ dissipée sur une période du mouvement. Cela conduira-t-il à son amortissement ?

13. On cherche à représenter la trajectoire dans l'espace des phases $(x,\dot{x})$, au cours d'une oscillation complète.

a) Préciser la nature de cette trajectoire pendant la phase collée, puis celle glissée.

b) Sur un même graphique, tracer son allure dans le cas d'une faible vitesse puis celui d'une forte vitesse.

14. **a)** Dans l'exemple du violon évoqué en introduction, quel est l'élément qui joue le rôle du “ressort” ?

b) De quoi sa raideur dépend-elle ?

c) Quelle elle la grandeur qui joue le rôle du poids ?

d) Comment faire varier l'amplitude du son émis ?

15. **a)** Dans l'exemple encore évoqué du crissement d'une craie, quelle est l'origine de sa manifestation acoustique ?

b) Proposer un ordre de grandeur plausible de la raideur impliquée dans ce phénomène.

16. Dans le cas où le mouvement s'effectue dans la limite du glissement permanent (seule phase glissée), préciser les analogies et les différences avec le mouvement d'un pendule vertical (masse suspendue à un ressort, dans le champ de pesanteur).

Les deux patins sont maintenant couplés.

Un second patin (identique au premier) est maintenant relié au premier par un ressort (identique au premier ressort) (figure 1b). On note $x_1(t)$ (resp. $x_2(t)$) l'abscisse du premier (resp. second) patin, mesurée depuis le mur et l'on rappelle que la longueur des patins est négligée.

On suppose, dans un premier temps (jusqu'à la question (**18**) inclue), que les deux patins glissent en permanence.

17. **a)** Montrer que le mouvement du premier patin est régi par l'équation :

$$\ddot{x_1} + 2\omega_0^2\, x_1 = \omega_0^2(x_2 + \delta_d) \qquad (6)$$

b) Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement du second patin.

c) Exprimer les positions d'équilibre $x_{1,eq}$ et $x_{2,eq}$ en fonction de l_0 et δ_d.

On recherche les modes propres du système, c'est-à-dire les états vibratoires tels que les deux patins oscillent à la même, et unique, pulsation. On introduit alors les grandeurs suivantes : $X_i(t) = x_i(t) - x_{i,eq}$. On utilisera la notation complexe : $\underline{X_i}(t) = \underline{A_i}\ \exp(j\omega t)$. On posera $\lambda \equiv \omega/\omega_0$.

18. **a)** Établir alors le système d'équations vérifiées par les amplitudes $\underline{A_1}$ et $\underline{A_2}$.

b) En déduire qu'il existe deux pulsations propres, que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \lambda^+ = (\sqrt{5}+1)/2 \\ \lambda^- = (\sqrt{5}-1)/2 \end{cases} \tag{7}$$

c) Pour chacun de ces modes propres, les mouvements des deux patins sont-ils en phase ? en opposition de phase ? en quadrature de phase ?

On se place maintenant dans le cas général pour lequel les deux patins ne glissent pas en permanence. La figure (3) présente un portrait de phase, dans une telle situation, obtenu pour $k = 2{,}5\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et $m = 100$ g, dans le régime stationnaire atteint après un transitoire.

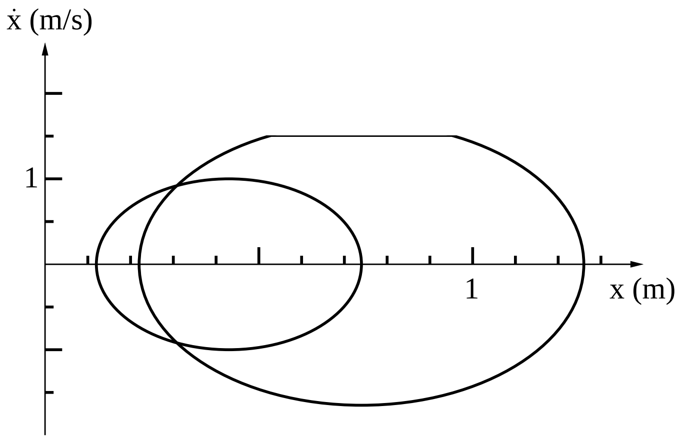

Figure 3 – Portrait de phase.

19. **a)** Déduire de la figure (3) une valeur approchée de V, l_0 et μ_d.

b) Déduire également une valeur approchée de la pulsation du mouvement du premier patin.

c) Retrouve-t-on alors l'une des valeurs obtenues à la question (**18b**) ?

20. Sur un même graphique, représenter l'allure de $x_1(t)$ et $x_2(t)$, au cours de deux périodes.

⋆ ⋆
⋆