Rapport sur l'épreuve de mathématiques D, ENS filière MP (2015)

François Charles (concepteur), Rémi Coulon, David Hermann, Cécile Huneau, Tony Ly (correcteurs)

L'épreuve de 6h de mathématiques de la session 2015 traitait d'irrégularités dans la distribution de certains ensembles d'entiers naturels. Les deux premières parties abordaient des questions combinatoires, tandis que les deux suivantes étudiaient la répartition des nombres premiers. On y suggèrait en particulier qu'il existe de grands intervalles d'entiers contenant plus de nombres premiers qu'attendu. Ce type de question a connu récemment des progrès spectaculaires à la suite du travail de Yitang Zhang, menant à la preuve de l'existence d'une infinité de couples (p, q) de nombres premiers tels que $|p - q| \leq 246$.

Comme souvent dans cette épreuve, le sujet était long. Les questions de fin de partie étaient plus difficiles que les autres, notamment la question III.7. La partie IV demandait une bonne compréhension des résultats prouvés en III. Aucun candidat n'a traité le sujet correctement dans son intégralité, mais plusieurs copies ont démontré une compréhension en profondeur de l'ensemble du problème.

Hors la partie IV, les différentes parties du sujet étaient indépendantes et abordaient des points différents du programme de mathématiques. Traiter correctement les parties I et II – sans leurs questions finales – et l'étude de fonction de la partie III assurait une très bonne note.

La qualité de la rédaction a été particulièrement appréciée des correcteurs. De nombreux candidats font preuve de trop d'imprécisions, que ce soit dans les questions de dénombrement ou, de manière plus surprenante, dans les questions de continuité, de dérivabilité et de convergence de la partie III. Il convient par ailleurs de faire attention aux questions d'inégalités larges et strictes. Rappelons cependant que la qualité de la rédaction n'est que peu reliée à sa longueur, et que certaines copies ont su allier avec bonheur rigueur et concision.

Afin de ne pas bloquer les candidats, les questions donnaient toujours le résultat à démontrer. Cependant, elles demandaient toujours une justification, et les correcteurs n'ont jamais accordé de point à un candidat mentionnant simplement que le résultat est évident. Bien entendu, les correcteurs ont été plus indulgents quant à la justification d'étapes de calcul classiques dans les questions les plus difficiles du sujet. Les candidats qui ont abordé significativement une de ces questions ont été récompensés.

Décrivons plus en détail le contenu du sujet. La première partie était la plus facile et ne demandait que peu de connaissances, ne demandant que des qualités de dénombrement.

La partie II était consacrée à une preuve du théorème de discrépance de Roth (1964), qui faisait l'objet de la question II.5.(b), par une méthode d'analyse harmonique. Ce résultat montre que si Y est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, N\}$ de densité proche ni de zéro ni de 1, il existe une progression arithmétique dans $\{1, \ldots, N\}$ dans laquelle le nombre d'éléments de Y est un peu différent de la moyenne. Il s'agit donc d'une obstruction à ce que Y soit équitablement réparti dans toutes les progressions arithmétiques.

La partie III introduisait une fonction ω – la fonction de Buchstab – définie par une équation fonctionnelle, et la reliait à une question de répartition de nombres premiers. Techniquement, il s'agit de mathématiques reliées à des méthodes de crible. La question III.1 correspondait à une étude de fonction sans considération arithmétique, et la suite de la partie III tirait un certain nombre de conséquences quantitatives du théorème des nombres premiers. Les candidats étaient amenés à utiliser des comparaisons séries-intégrales à plusieurs reprises.

La partie IV suivaient directement la partie III pour appliquer le lien entre les oscillations de la fonction ω, observées en III.1.(g), et des irrégularités dans la répartition des nombres premiers. Il s'agissait d'un exposé de la méthode de la matrice, dûe à Maier (1985). Des considérations plus avancées de théorie analytique des nombres permettraient de montrer que le premier énoncé de la question IV.3 est vrai, fournissant ainsi des grands intervalles d'entiers contenant plus de nombres premiers qu'attendu.

Pour conclure, faisons quelques remarques sur des questions précises.

— Les questions I.1 étaient élémentaires, et devaient être traitées avec précision et concision ;

— En I.2.(b), il fallait remarquer que le terme $\Delta(S_{q,a}(N), Y)^2)$ ne dépend que de l'intersection de Y avec $S_{q,a}(N)$ pour pouvoir appliquer les questions précédentes ;

— Un candidat a remarqué que la formulation de la question I.3 la rendait trop facile : on peut prendre $Y = \{1, \ldots, E(N/2)\}$, où E est la partie entière. Cette réponse étaient bien entendu correcte. La démonstration attendue, qui utilisait la question précédente avec $t = 1/3$, permettrait *mutatis mutandis* de montrer le résultat de la question I.3 en remplaçant les $S_{q,a}(N)$ par l'ensemble des progressions arithmétiques de raison, de longueur et de point de départ arbitraires ;

— En II.4.(a), de nombreux candidats ont été trop imprécis dans leur dénombrements ;

— En II.4.(c), il n'était pas nécessaire de calculer la somme trigonométrique en question : une estimation de sa partie réelle terme à terme suffisait ;

— La suite de question III.1 a souvent été traitée de manière trop imprécise ;

— Un candidat a remarqué une erreur dans la question II.5 : il fallait montrer

$$|\Phi(x, y) - \pi(x) + \pi(y)| \leq 2.$$

Cette erreur ne changeait pas la suite de la question.

— Les questions III.7.(b) et (c) étaient les plus difficiles du problème et demandaient une habileté technique certaine.