Banque MP inter-ENS – Session 2015

Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS de Cachan, ENS de Lyon, ENS de Paris, ENS de Rennes

- **Coefficients (en % du total concours) :**
  — Cachan MPI 9,62 % ; Info 13,60 %
  — Lyon : MPI 10,81 % ; Info/M 12,70 %
  — Paris : MPI/MP 3,70 % ; Info 13,33 %
  — Rennes : MPI 9,62 % ; Info 11,43 %

- **Membres du jury :**
  Ludovic Goudenège, Pierre Pageault, Robin Ryder, Camille Tardif.

L'épreuve de mathématique C 2015 portait sur l'étude de quelques propriétés asymptotiques de suite de variables aléatoires. Ce sujet a permis de tester les candidats sur leur aisance à manipuler les techniques et les outils classiques d'analyse au programme des classes préparatoires aux grandes écoles.

Les notes se sont étalées de 0 à 20 avec une moyenne de 9.7 et un écart type de 3.3.

De manière générale, le jury a récompensé la précision et la concision des rédactions ainsi que l'honnêteté des candidats. À l'inverse, les candidats ayant cherché à imposer leurs résultats à l'aide d'affirmations arbitraires ou d'arguments imprécis, ont été sanctionnés.

Sans prétendre traiter l'intégralité du sujet, on attend tout de même des candidats qu'ils abordent un certain nombre de questions "substantielles" pour obtenir une bonne note.

Enfin, il est rappelé aux candidats que la présentation entre pour une part importante dans l'appréciation d'une copie. En particulier, les abréviations sont à proscrire et les résultats obtenus doivent être mis en évidence. De même, les candidats ne doivent pas hésiter à décrire les étapes de leurs raisonnements à l'aide de phrases.

Partie 1

La première partie de ce sujet utilise des outils classiques d'analyse dont la maîtrise est un attendu : intégrales impropres, régularité d'une intégrale à paramètre, équations différentielles linéaires, ... Traitée entièrement, elle permettait déjà à un candidat d'obtenir une note tout à fait correcte.

La maitrise des notions sus-citées fait malheureusement défaut à de nombreux candidats. En particulier, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre est souvent appliqué de manière très approximative, notamment en ce qui concerne l'hypothèse de domination. Il n'est ainsi pas rare de trouver des majorations non-uniformes, ou résultant visiblement d'une confusion entre la variable d'intégration et le paramètre. De trop nombreux candidats estiment également que la dérivation ne mérite même pas d'explication, peut être parce que l'intégration à lieu sur un compact. Attention, cette démarche est risquée, surtout en début de copie où le candidat devait plutôt s'efforcer d'instaurer un climat de confiance avec le correcteur.

La manipulation des inégalités et des majorations, au cœur de l'analyse, a également posé de grosses difficultés aux candidats. La deuxième partie de la question 4) a ainsi été extrêmement discriminante. De trop nombreux candidats on cherché à imposer le résultat par le biais de majorations fausses ou non-justifiées. Une fois encore, l'honnêteté des candidats a été récompensée et le jury a préféré une remarque pertinente ou critique à l'égard d'un résultat non-abouti plutôt qu'une démonstration hasardeuse.

On rappelle également aux futurs candidats que la justification de l'existence des objets manipulés est essentielle et témoigne d'un esprit critique apprécié. Ainsi, le jury a récompensé les candidats qui on pris la peine de justifier la convergence des intégrales manipulées même si celle-ci n'était pas demandée explicitement.

Partie 2

Le but de cette deuxième partie est de montrer une caractérisation de la convergence étroite vers la Gaussienne. L'intégration par partie suggérée pour traiter la question 1 est rarement énoncée avec toutes ses hypothèses et la justification est souvent donnée a posteriori après un calcul formel. De plus l'hypothèse portant sur le caractère bornée de φ' est peu utilisée et l'existence des intégrales est rarement bien justifiée. La question 2 a été bien traitée dans l'ensemble et il s'agissait d'utiliser les résultats de la première partie. Néanmoins une erreur récurrente a été d'introduire h comme solution de $h' - xh = f$ (et non $f - < f >$). La question 3 a été très discriminante, notamment les sous-questions 3d) et 3e). La question 3a) s'appuyait sur la question 1) et a été bien traitée dans l'ensemble, il suffisait de bien justifier le caractère borné de $h' - xh$. La question 3b) a été assez discriminante et souvent mal rédigée. Peu de candidats ont vu qu'on pouvait choisir R indépendamment de n (ce qui n'était pas demandé mais qui est crucial pour la question 3e)). La question 3c) a également été assez discriminante et très souvent mal rédigée avec beaucoup d'interversions de quantificateurs fausses et non justifiées. La question d) a été très discriminante et assez mal rédigée dans l'ensemble. Le théorème de Weierstrass, souvent invoqué, est rarement bien utilisé. La question e) a été très peu traitée correctement car beaucoup de candidats ont pensé que c'est une application directe de 3b) et 3d) alors qu'il est nécessaire de montrer qu'on peut prendre la constante C de la question 3b) indépendamment de n. Encore une fois beaucoup de candidats intervertissent des quantificateurs sans aucune justification.

Partie 3

Cette partie est celle qui demandait le plus de connaissances en probabilités, même si les connaissances nécessaires restent quand même très élémentaires. Les six questions amenaient progressivement les candidats à la démonstration d'un théorème central limite pour une suite de variables aléatoires, indépendantes, centrées réduites et uniformément bornées. Ces hypothèses relativement fortes permettent de justifier très aisément l'existence de la plupart des objets et de répondre aux questions sans trop de difficultés.

— Dès la question 1, la plupart des candidats ne font même pas l'effort de justifier l'existence de l'espérance de la variable aléatoire construite, pourtant évidentet de part le caractère borné des quantités utilisées.

— La question 2 demandait l'utilisation d'un développement de Taylor-Lagrange. Toutes les justifications avec des développements limités ont été systématiquement refusées, puisque cette ligne de preuve ne permet pas d'aboutir au résultat demandé.

— Pour la question 3, la plupart des candidats trouvent une constante M^3 à la place de M. Cela n'a pas été pénalisant mais les copies trouvant une constante M ont été bonifiées.

— La question 4 a été très peu traitée par les candidats, et la plupart du temps elle a été mal traitée, alors que la démarche est la même que les questions 2 et 3.

— La plupart des candidats ont traité la question 5 qui n'était qu'une simple application des questions précédentes. C'est parfois la seule question (avec la question 1) qui a été traitée dans cette partie.

— La question 6 était difficile à traiter entièrement. Les correcteurs ont valorisé toute tentative de réponse, parfois même avec un dessin.

Partie 4

L'objectif de cette partie est de prouver l'inégalité de Bennett.

— La question 1a découle directement d'une inégalité de convexité, avec l'écriture $X = \frac{M-X}{2M}M + \frac{M+X}{2M}(-M)$. Certains candidats ont cherché à appliquer l'inégalité de Jensen, qui n'est pas au programme, qui ne permet pas d'arriver au résultat demandé, et que les candidats maîtrisent visiblement mal.

— La question 1b peut être résolue rapidement par un développement en séries entières. Les tentatives d'étude de fonction n'ont généralement pas abouti.

— Pour la question 2, il fallait appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\exp(t \sum X_i)$, puis optimiser sur t. Cette idée n'apparaît que dans quelques bonnes copies.

— La question 3 est ouverte et n'a quasiment jamais été traitée ; les quelques réponses proposées étaient rarement pertinentes. Il faut d'abord remarquer qu'on doit poser $a = \delta\sqrt{n}$. En notant $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum^n X_i$, les résultats III.6 et IV.2 permettent tous deux de montrer que $\forall \delta > 0, P[\bar{X}_n > \delta] \to 0$ (si on prouve également l'équivalent symétrique, on a démontré la loi faible des grands nombres), mais le résultat IV.2 donne une convergence plus rapide. Si par contre on s'intéresse à la convergence de la variable aléatoire Z_n, alors seul le résultat III.6 permet de conclure. De façon plus générale, si on s'intéresse à la convergence de $n^{-\alpha}\sum^n X_i$, alors le résultat IV.2 est plus puissant pour $\alpha > \frac{1}{2}$, et le résultat III.6 est plus puissant pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

Cette comparaison détaillée n'est apparue dans aucune copie ; un début de raisonnement suffisait à obtenir quelques points.

— À nouveau, certains candidats se sont perdus dans une longue étude de fonction pour la question 4a. Une décomposition en série entière permettait là encore de conclure rapidement.

— Très peu de candidats ont eu le temps de traiter la question 4b dans son intégralité. Le raisonnement est similaire à celui de la question 2.

⋆ ⋆
⋆