Composition de Mathématiques, Filière PC
(XEULC)

Les notes des candidats français se répartissent selon les données du tableau suivant :

$0 \leqslant N < 4$	88	7,01 %
$4 \leqslant N < 8$	630	50,20 %
$8 \leqslant N < 12$	390	31,08 %
$12 \leqslant N < 16$	108	8,61 %
$16 \leqslant N \leqslant 20$	39	3,11 %
Total	1255	100 %
Nombre de copies : 1255		
Note moyenne : 7,89		
Écart-type : 3,29		

Commentaires généraux

Le sujet permettait de montrer, entre autres, le théorème min - max de Courant-Fischer puis les inégalités de Weyl et de Ky Fan qui précisent les liens existant entre les valeurs propres de deux matrices symétriques réelles et celles de leur somme. Il était en progression avec un découpage très fin approprié à la nature des questions.

Rappelons que le candidat a grand intérêt à lire le sujet intégralement avant de commencer à le traiter et à faire preuve de perspicacité pendant cette lecture : affirmer que "$s^{\downarrow}$ est linéaire" rend un bon nombre des questions suivantes complètement triviales !

Il est regrettable qu'une partie non négligeable des candidats fassent preuve d'un manque de rigueur sur des questions élémentaires comme le calcul d'un déterminant d'ordre 2, des racines d'un polynômes de degré 2,...

Les correcteurs ont apprécié les efforts faits par une grande partie des candidats dans leur rédaction. Il faut maintenir celui-ci en continuant non seulement à énoncer entièrement les théorèmes mais en vérifiant aussi toutes leurs hypothèses. Il faut également être clair et précis dans sa rédaction et ne pas omettre de quantificateurs aux passages cruciaux des démonstrations. Il est important de bien mettre en évidence les points clés d'une démonstration (nom d'un théorème, hypothèse importante utilisée, etc), en les entourant par exemple. C'est plus important que d'entourer la solution elle-même (que le correcteur connait) et cela détermine pour le correcteur la compréhension ou non de la question par le candidat. Dans le même ordre d'idée, lorsque les candidats utilisent les résultats des questions précédentes, il faut les mentionner proprement.

Concernant la présentation des copies, le nombre de copies très mal écrites, est heureusement en diminution. Il faut absolument que les candidats aient en mémoire que la copie est un endroit où l'on rend un résultat propre, abouti, réfléchi, rédigé et bien présenté. Ce n'est pas une feuille de brouillon ! Nous en avons encore tenu compte cette année dans la notation.

Concernant la stratégie, c'est en faisant avec soin les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on gagne réellement des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. On peut dire sans exagérer qu'environ 75% des candidats font le même lot de questions, avec plus ou moins de bonheur. Les candidats qui font vraiment la différence sont ceux qui font deux ou trois questions plus difficiles, plus longues, où il y a un raisonnement en deux ou trois étapes à faire.

La qualité de la présentation et de la rédaction était notée sur 3,5 points. Passons maintenant au détail, question par question.

I – Première partie

Cette première partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 15 points.

1 a) La plupart des candidats ont plutôt bien traité cette première question. Remarquons néanmoins que la justification de la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ apparaît dans peu de copies. Le plus souvent, la dimension est donnée sans justification.

Concernant la définition de l'application $s^{\downarrow}$, la majorité des candidats ont su dire qu'une matrice symétrique réelle d'ordre n possède n valeurs propres sans toutefois préciser qu'elles sont réelles donc ordonnables.

1 b) Pour cette question, il suffisait d'exhiber un contre-exemple montrant que $s^{\downarrow}$ ne satisfait pas la propriété d'additivité ou d'homogénéité et qu'elle est par conséquent non linéaire en dimension supérieure ou égale à 2. Quelques très rares candidats ont remarqué qu'en dimension un, l'application $s^{\downarrow}$ correspond à l'identité et est donc linéaire.

Notons que cette question était très importante pour la suite de l'épreuve. Il est à regretter que les candidats ayant affirmé que $s^{\downarrow}$ était linéaire n'aient pas été surpris par la trivialité de certaines des questions suivantes.

1 c) Cette question a été correctement traitée par la majorité des candidats ayant montré à la question précédente que $s^{\downarrow}$ n'était pas linéaire.

1 d) Le polynôme caractéristique de la matrice M est donné par $P(x) = (\lambda - x)(\mu - x) - h^2$.

Les racines de P sont données par

$$m_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\lambda + \mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4h^2}\right).$$

Par conséquent, $s^{\downarrow}(M) = (m_+, m_-)$. La plupart des candidats ont traité cette question avec plus ou moins de réussite ; il est à noter un manque de rigueur inacceptable dans certains calculs algébriques : calcul du déterminant d'une matrice 2×2, calcul des zéros d'un polynôme de degré 2 (notamment la formule du discriminant est parfois erronée), classement dans l'ordre décroissant des racines m_+, m_-.

2 a) La majorité des candidats a pensé à utiliser le théorème spectral afin de démontrer l'existence d'une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs propres pour M qu'on peut ensuite ordonner selon la décroissance des valeurs propres $m_i, i = 1, \ldots, n$. En utilisant le fait que la base $(v_1, \ldots, v_n)$ est orthonormée, on montre que $\sum_{i=1}^n m_i v_i {}^t v_i$ en v_j est égal à $m_j v_j = M v_j$. Par identification sur une base, on a bien l'égalité demandée.

2 b) De manière surprenante, le calcul de $\langle x, Mx \rangle$ a posé problème à de nombreux candidats, nécessitant parfois une page entière de calculs pour montrer que $\langle x, Mx \rangle = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$. Les m_i étant ordonnées, on en déduit que pour tout vecteur x de norme 1, $\langle x, Mx \rangle$ est inférieur ou égal à m_1. Il ne faut pas oublier de montrer que le sup est atteint, par exemple en choisissant le vecteur v_1.

2 c) Il s'agit de raisonner comme dans la question précédente. Les candidats ayant correctement répondu à la question précédente ont en général bien réussi celle-ci.

3 a) Cette question a été correctement traitée par la plupart des candidats.

3 b) Cette question n'a été correctement traitée que dans très peu de copies malgré l'indication donnée. Il suffisait de raisonner de la façon suivante. On note $\mathcal{W}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_j, \ldots, v_n$, il est de dimension $n-j+1$ ce qui implique par 3 a) que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ est non vide. Il existe donc un vecteur x dans $\mathcal{V}$ de norme 1 tel que $\langle x, Mx \rangle \leq m_j$ d'après la question 2 c).

3 c) La question 3 b) donne

$$\sup_{\mathcal{V}, \dim \mathcal{V} = j} \; \inf_{x \in \mathcal{V}, ||x||=1} \langle x, Mx \rangle \leq m_j.$$

On choisit ensuite $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_j$. Pour $x = \sum_{i=1}^j x_i v_i$ de norme 1, le produit scalaire $\langle x, Mx \rangle$ est supérieur ou égal à m_j, avec égalité si x est choisi égal à v_j. On en déduit ainsi l'inégalité inverse. Il est regrettable de voir que pour de nombreux candidats, la notion de sup et d'inf n'est pas acquise.

4 a) Cette question difficile n'a été traitée que par une toute petite minorité de candidats. Par hypothèse, $s^{\downarrow}(M - L)$ a tous ses coefficients positifs donc en particulier le dernier qui est égal, d'après la question 3 c) (prendre $j = n$ et donc nécessairement $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$), à

$$\inf_{x;||x||=1} \langle x, (M - L)x\rangle = s^{\downarrow}(M - L)_n \geq 0.$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, Mx\rangle \geq \langle x, Lx\rangle.$$

Soit $L = \sum_i l_i v_i^t v_i$ une résolution spectrale de L et $\mathcal{V}_j$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres $v_1, \ldots, v_j$. D'après 3 b), il existe $x \in \mathcal{V}_j$ de norme 1 tel que $\langle x, Mx\rangle \leq m_j$. Pour cet x, on aura par 2 c), $\langle x, Lx\rangle \geq l_j$. Finalement, on a montré que pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$l_j \leq \langle x, Lx\rangle \leq \langle x, Mx\rangle \leq m_j.$$

4 b) Cette question a été traitée par un tout petit nombre de candidats. Il suffisait de remarquer que pour tout x,

$$\langle x, Mx\rangle \leq ||M||.\sqrt{||x||}^2 = \langle x, ||M||I_n x\rangle$$

soit $\langle x, (||M||I_n - M)x\rangle \geq 0$. Donc, d'après la question 2 c), toutes les valeurs propres de $||M||I_n - M$ sont positives.

4 c) Cette question n'a quasiment pas été abordée. Elle n'était pourtant pas très difficile. En effet, en combinant les résultats des questions 4 a) et 4 b), on peut montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n$, $l_j \leq ||L - M|| + m_j$. En intervertissant les rôles de L et M, on a aussi $m_j - l_j \leq ||M - L|| = ||L - M||$, d'où l'inégalité demandée.

4 d) Pour cette question, il suffit d'appliquer 4 c), beaucoup de candidats l'ont résolue en admettant 4 c).

5 a) Un très grand nombre de candidats n'a répondu qu'à la deuxième partie de la question, soit en admettant le résultat de la première partie, soit en remarquant que l'ensemble des matrices symétriques dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes est l'image réciproque de l'ouvert $\{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n; t_i \neq t_j \text{ si } i \neq j\}$ par l'application $s^{\downarrow}$ qui est continue, d'après 4 d).

5 b) Peu de candidats ont réussi à démontrer le résultat demandé. Néanmoins, ceux qui l'ont fait l'ont en général bien fait. D'après 1 d), les valeurs propres doubles correspondent à $\lambda = \mu$ et $h = 0$. Il suffisait ensuite d'utiliser des outils classiques d'analyse pour montrer que la fonction de plusieurs variables $(\lambda, \mu, h) \to m_{\pm} = m_{\pm}(\lambda, \mu, h)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ avec des valeurs propres distinctes. L'existence et la continuité des dérivées partielles en λ, μ, h permettait de conclure.

En revanche, pour $\lambda = \mu$, les applications $h \to m_{\pm} = \lambda \pm |h|$ ne sont évidemment pas dérivables en $h = 0$. Dans ce cas, la première composante de $s^{\downarrow}$ n'est pas différentiable.

II – Deuxième partie

Cette partie II, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 11 points.

6 a) Cette question a été correctement traitée par un grand nombre de candidats. Il suffisait de dire que la trace est linéaire, invariante par changement de base donc égale à la somme de ses valeurs propres.

6 b) De manière étonnante, cette question n'a été correctement traitée que dans très peu de copies alors qu'il suffisait d'appliquer le résultat de la question 2 b) à un vecteur propre de norme 1 pour la valeur propre c_1 de la matrice C.

6 c) Comme pour la question précédente, très peu de candidats ont réussi à traiter celle-ci. Le résultat de 6 b) et celui de 1 c) permettait d'obtenir l'inégalité demandée.

7 a) Cette question n'a été correctement traitée que par un nombre infime de candidats. Par ailleurs, de nombreux candidats ont mal traité cette question en utilisant une fausse généralisation de la formule de Grassmann à trois sous-espaces vectoriels : $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}+\mathcal{W})+\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W})$ n'est pas égale en général à $\dim(\mathcal{U})+\dim(\mathcal{V})+\dim(\mathcal{W})$!

Une solution était d'appliquer deux fois la formule de Grassmann : tout d'abord à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ puis à $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$.

7 b) Cette question n'a quasiment pas été abordée. Il suffisait d'introduire les résolutions spectrales des matrices A, B et C, soit $A = \sum_i a_i u_i^t u_i, B = \sum_i b_i v_i^t v_i$ et $C = \sum_i c_i w_i^t w_i$, puis de considérer les espaces vectoriels : $\mathcal{U} = ev(u_j, \ldots, u_n)$ de dimension $n - j + 1$, $\mathcal{V} = ev(v_k, \ldots, v_n)$ de dimension $n - k + 1$ et $\mathcal{W} = ev(w_1, \ldots, w_{j+k-1})$ de dimension $j + k - 1$. Comme la somme des trois dimensions est strictement supérieure à $2n$, il existe d'après la question précédente un vecteur x de norme 1 dans $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$. En appliquant trois fois la question 2 c) à ce vecteur, on en déduit l'inégalité demandée.

8 a) Cette question a été plutôt réussie quand elle a été traitée.

8 b) Cette question, très calculatoire et sans forcément de connexion avec le reste du sujet, a été "grattée" par de nombreux candidats, sans que cela plaise au jury.

8 c) Cette question ne fut que très peu traitée correctement, même par ceux ayant réussi la question 8 a), personne n'ayant vu qu'il fallait faire appel à la question précédente.

8 d) Cette question est une conséquence presque immédiate de la précédente, quasiment non traitée. Il en fut donc de même.

8 e) Il suffisait finalement d'appliquer la question 8 d) et certains s'en sont rendus compte.

III – Troisième partie

La troisième et dernière partie n'a été traitée, même partiellement, que par une fraction infime des candidats. Et une fraction encore plus infime y a obtenu des points. Cette partie III, si elle était entièrement traitée, pouvait rapporter 6 points.

9) Commencer par les matrices diagonales était une grosse indication. Mais il fallait réussir à écrire correctement les deux matrices particulières et ne pas se tromper dans les calculs de distance, une tâche compliquée apparemment en fin d'épreuve.

10 a) Il suffisait pour répondre à cette question de changer de base, certains (peu) s'en sont aperçus.

10 b) Il n'y a que très très peu de candidats (une poignée) qui ont abordé cette question, mais certains ont trouvé une réponse satisfaisante (la fonction était $\theta \mapsto R_{-\theta} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} R_\theta$ où R_θ est la matrice de rotation).

10 c) Aucun candidat n'a su utiliser le fait que la fonction ci-dessus est continue, surjective sur Σ inclu dans un intervalle. En conséquence, son image ne peut être qu'un intervalle, d'où le résultat.