**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON**

# Concours d'admission session 2016

## Filière universitaire : Second concours

# COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*

⋆ ⋆ ⋆

*Le problème porte entièrement sur des polynômes dits* de Bernstein. *Les parties sont essentiellement indépendentes les unes des autres, mais les candidats seront évalués sur leur capacités à traiter les différents aspects soulevés.*

On note $\mathcal{C}[0,1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}[0,1]$ de la norme usuelle, donc de la topologie de la convergence uniforme :

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

On note $P_n$ le sous-espace de $\mathcal{C}[0,1]$ formé des fonctions polynomiales de degré $\leq n$. Par commodité, on ne distinguera pas un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de la fonction polynomiale $x \mapsto Q(x)$ qu'il définit sur $[0,1]$ ou sur $\mathbb{R}$. Si $k \in \mathbb{N}$, on note $e_k$ la fonction polynomiale $x \mapsto x^k$. La base *canonique* de $P_n$ est $\{e_0, \ldots, e_n\}$.

Si $f \in \mathcal{C}[0,1]$, on définit une fonction $B_n f \in P_n$ par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Si $Q \in P_n$, on définit aussi $\Delta_h Q \in P_n$ par

$$\Delta_h Q(x) = Q(x+h) - Q(x).$$

Si $\ell \geq 1$ est un entier, on note $\Delta_h^{(\ell)}$ l'application composée

$$\underbrace{\Delta_h \circ \cdots \circ \Delta_h}_{\ell \text{ termes}}.$$

On a donc $\Delta_h^{(1)} = \Delta_h$. Par extension, on pose $\Delta_h^{(0)} f = f$.

### Une intégrale

1. Posons
$$I_{n,k} = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx.$$
Montrer que $I_{n,k} = I_{n,k+1}$ pour tout $k = 0, \ldots, n-1$. En déduire la valeur des $I_{n,k}$.

2. Quelle majoration de
$$\int_0^1 |B_n f(x)|\, dx$$
en déduisez-vous ?

## Polynômes, combinatoire, valeurs propres

3. Vérifier que $B_n : \mathcal{C}[0,1] \to P_n$ est une application linéaire. Montrer que
$$\|B_n f\| \leq \|f\|, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}[0,1].$$
Comment interprétez-vous cette majoration ?

4. Soit $Q$ une fonction polynomiale, non constante. Montrer que $\deg \Delta_h Q = \deg Q - 1$. Exprimer le coefficient dominant de $\Delta_h Q$ en fonction de celui de $Q$.

5. Si $\deg Q \geq \ell$, exprimer le coefficient dominant de $\Delta_h^{(\ell)} Q$ en fonction de celui de $Q$. Si au contraire $\deg Q < \ell$, que vaut $\Delta_h^{(\ell)} Q$ ?

6. Démontrez la formule
$$\Delta_h^{(\ell)} Q(x) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^{\ell-i} \binom{\ell}{i} Q(x+ih).$$

7. En déduire que si $Q$ est polynomiale, alors
$$B_n Q(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \Delta_{1/n}^{(j)} Q(0).$$

8. On note $L_n$ la restriction de $B_n$ à $P_n$, qui est donc un endomorphisme. Montrer que
$$\deg L_n Q \leq \deg Q, \qquad \forall\, Q \in P_n.$$
En déduire que la matrice $M_n$ de $B_n$, dans la base canonique de $P_n$, est triangulaire supérieure.

9. Calculer les valeurs propres de $L_n$.

10. Montrer que $L_n$ est diagonalisable.

11. En déduire que pour tout $k = 0, \ldots, n$, $L_n$ admet une fonction propre $p_{n,k}$ de degré $k$. Quelle est la valeur propre associée à $p_{n,k}$ ?

## Approximation uniforme, probabilités

Si $X$ est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

12. Soit $n \geq 1$ un entier et $p \in [0,1]$ un nombre réel. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires avec $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = 1 - p$, qu'on suppose indépendantes. Calculer $E(X_i)$, $V(X_i)$.

13. En déduire la valeur de $P(S_n = m)$, où $S_n$ désigne la variable aléatoire
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

14. Soit $\delta > 0$. Montrer que
$$P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - p\right| > \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}\,.$$

15. On se donne aussi une fonction $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Exprimer $B_n f(p)$ comme l'espérance d'une variable aléatoire, en exploitant la question 13.

16. Pour $\delta > 0$, on définit
$$\omega_f(\delta) = \sup_{x,y\in[0,1] \text{ et } |y-x|<\delta} |f(y) - f(x)|.$$
Montrer que
$$\lim_{\delta\to 0+} \omega_f(\delta) = 0.$$

17. Montrer que
$$\left| E\left( f\left( \frac{1}{n} S_n \right) \right) - f(p) \right| \leq \omega_f(\delta) + 2\|f\| P\left( \left| \frac{1}{n} S_n - p \right| > \delta \right).$$

18. En déduire que $B_n f(p) \to f(p)$ quand $n \to +\infty$, et que cette convergence est uniforme :
$$\lim_{n\to+\infty} \|B_n f - f\| = 0.$$

19. On suppose de plus que $f$ est lipschitzienne. Montrer l'existence d'un nombre fini $C \geq 0$ tel que
$$\forall\, n \geq 1, \qquad \|B_n f - f\| \leq \frac{C}{n^{1/3}}\,.$$