ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2016 FILIÈRE MP – CONCOURS INFO

COMPOSITION D'INFORMATIQUE-MATHÉMATIQUES – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Langage d'une Chaîne de Markov

Soit N un entier positif. On appelle *chaîne de Markov* une matrice M de $\mathbb{R}^{N,N}$ telle que :

— pour toute entrée i, j : $1 \leq i, j \leq N$, $M(i,j) \in [0,1]$ et

— pour toute colonne $1 \leq j \leq N$, $\sum_{i=1}^{N} M(i,j) = 1$.

Une *distribution* est un vecteur colonne $X \in [0,1]^N$ avec $\sum_{i=1}^{N} X(i) = 1$, où $X(i)$ est la $i$ème coordonnée de X. On note *Distrib* l'ensemble des distributions.

Soit X une distribution. On s'intéresse à la première coordonnée $(M^k \cdot X)(1)$ de l'application de M^k à X, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$. Etant donné un réel τ dans $[0,1]$, on veut savoir si $(M^k \cdot X)(1) \leq \tau$ ou non. On notera A (Above) pour $(M^k \cdot X)(1) \geq \tau$, et B (Below) pour $(M^k \cdot X)(1) < \tau$, où A, B sont deux lettres distinctes.

Formellement, on définit la suite $(\sigma_k^{M,X,\tau})_{k \in \mathbb{N}}$ avec :

— $\sigma_k^{M,X,\tau} = A$ si $(M^k \cdot X)(1) \geq \tau$, et

— $\sigma_k^{M,X,\tau} = B$ si $(M^k \cdot X)(1) < \tau$.

On appelle $(\sigma_k^{M,X,\tau})_{k \in \mathbb{N}}$ la *trajectoire* de M à partir de X. On peut voir $(\sigma_k^{M,X,\tau})_{k \in \mathbb{N}}$ comme un mot infini sur l'alphabet $\{A, B\}$.

Par exemple, prenant $\tau = \frac{1}{2}$, la trajectoire à partir de $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

est $A\,B\,A\,B \ldots$, c'est à dire $\sigma_k^{M,X_0,\frac{1}{2}} = A$ pour tout k pair, et $\sigma_k^{M,X_0,\frac{1}{2}} = B$ pour tout k impair. En effet, $(M^0 \cdot X)(1) = 1, (M^1 \cdot X)(1) = \frac{1}{4}, (M^2 \cdot X)(1) = \frac{10}{16}, \ldots$.

Plus généralement, on s'intéressera au langage $L(M,\tau)$ d'une chaîne de Markov M, c'est à dire à l'ensemble des trajectoires $(\sigma_k^{M,X,\tau})_{k \in \mathbb{N}}$ à partir de toutes les distributions X possibles : $L(M,\tau) = \{(\sigma_k^{M,X,\tau})_{k \in \mathbb{N}} \mid X \text{ une distribution } \}$

Par exemple, $L(M_0, \frac{1}{2}) = \{w, w', w''\}$ avec :

— la suite w définie par $w = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $a_k = A$ pour k pair et $a_k = B$ pour k impair (c'est à dire $w = ABABAB \cdots$).

— la suite w' définie par $w' = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $b_k = A$ pour k impair et $b_k = B$ pour k pair (c'est à dire $w = BABABA \cdots$).

— la suite w'' définie par $w'' = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $c_k = A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (c'est à dire $w = AA \cdots$).

Ce sujet comprend 8 pages au total, 4 parties, et 13 questions. Les résultats d'une question pourront être admis dans la suite du sujet.

PARTIE I. Préliminaires.

Question 1 Montrer que pour toute chaîne de Markov M et toute distribution X, $M \cdot X$ est une distribution.

On veut décrire un algorithme pour calculer l'ensemble I des indices i tel qu'il existe ℓ avec pour tout $n \geq \ell$, pour toute distribution initiale X_0, on a $(M^n \cdot X_0)(i) = 0$. Pour cela, on va considérer le graphe orienté suivant : $G_M = (V, E)$ avec l'ensemble de sommets $V = \{1, \ldots, N\}$ et l'ensemble des arêtes $(i, j) \in E$ si et seulement si $M(i, j) \neq 0$.

Question 2 Soit $i \in V$ un sommet du graphe G_M. Considérons les composantes fortement connexes de G_M.

a) Supposons que la composante fortement connexe à laquelle appartient i ait au moins un autre élément j. Montrer que $i \notin I$.

b) Supposons que la composante fortement connexe à laquelle appartient i est le singleton $\{i\}$ et que $(i, i) \in E$. Montrer que $i \notin I$.

c) Caractériser I grâce aux composantes fortement connexes de G_M.

On va donc maintenant s'interresser à un algorithme pour calculer les composantes fortement connexes d'un graphe orienté.

Question 3 La première méthode considérée est assez naïve. Il s'agit pour chaque sommet $v \in V$ de calculer la liste L_v des sommets accessibles à partir de v. Pour les algorithmes, on demande une explication claire de leur fonctionnement, permettant de se convaincre que les programmes que vous écrirez sont corrects.

a) Donner un algorithme pour obtenir l'ensemble des composantes fortement connexes à partir de $(L_v)_{v \in V}$. On attend en sortie de l'algorithme une liste de listes, listant les composantes connexes, chaque composante connexe étant représentée par la liste de ses éléments (dans un ordre quelconque).

b) En déduire un algorithme pour calculer l'ensemble I. Montrer que la complexité de cette approche pour calculer I à partir de (E, V) est un $O(|E|^k)$ pour un k que vous déterminerez. Notez que $|V| = N \leq |E|$ pour $|V|$ le nombre de sommets et $|E|$ le nombre d'arêtes.

Afin d'optimiser la complexité de recherche des composantes fortement connexes, on va s'appuyer sur l'algorithme de Tarjan donné ci-dessous, basé sur la recherche en profondeur. Il y a 3 tableaux globaux b, p, q indexés par les sommets. D'abord, pour chaque sommet v, l'entrée $b(v) \in \{0, 1\}$ mentionne si le sommet v a été vu (entrée 1) ou non (entrée 0) par la recherche auparavant. Ensuite, pour chaque sommet v présent sur la pile de recursion, $p(v) \in \mathbb{N}$ donne explicitement sa hauteur de pile (hauteur 1 pour le premier sommet de la pile, les sommets qui ne sont pas sur la pile ont hauteur 0). Enfin, pour chaque sommet v, l'entrée $q(v)$ donne le $q(v) = p(w) > 0$ minimal avec w un sommet sur la pile visité par Profondeur à partir de v. La valeur 0 est reservée pour les sommets v qui ne sont pas sur la pile. Les noms v des sommets sont des entiers de 1 à N. Enfin, on a une liste cc globale qui contient les sommets courants de la prochaine composante connexe qui va être affichée. L'algorithme est le suivant. On admettra qu'il affiche, une par une, les composantes fortement connexes (ligne 14) :

```
1  SousFonction Profondeur($v$)
2   Pour tout successeur $w$ de $v$
3     Si ($p(w) \neq 0$) %%c'est à dire $w$ est sur la pile
4       $q(v) := min(q(v), p(w))$
5     FinSi
6     Si ($b(w) = 0$) %%$w$ n'a pas encore été visité
7       $p(w) := p(v) + 1$ et $q(w) := p(w)$
8       Appel Profondeur($w$)
9       $q(v) := min(q(v), q(w))$
10    FinSi
11  FinPourTout
12  Ajouter $v$ à $cc$
13  Si ($q(v) = p(v)$)
14    Afficher $cc$
15    $cc$:=liste_vide
16  FinSi
17  $p(v) := 0$, %%$v$ n'est plus sur la pile
18 EndSousFonction Profondeur

19 Fonction Tarjan()
20   $cc$ la liste vide, $b, p, q$ tableaux de 0
21   $v := 1$, %%on initialise au premier sommet
22   TantQue (b(v)=0)
23     $b(v) := 1$, $p(v) := 1$ et $q(v) := 1$
24     Call Profondeur($v$)
25     TantQue ($b(v) = 1$ et $v < N$)
26       $v := v + 1$
27     FinTantQue %%$v$ est le plus petit avec $b(v) = 0$ ou $v = N$
28   FinTantQue
29 EndFonction Tarjan
```

c) Montrer que la complexité pour calculer I à partir de (E, V) et en utilisant l'algorithme de Tarjan est un $O(|E|^{k'})$ pour un k' que vous déterminerez.

PARTIE II. Exemples de chaînes de Markov.

Considérons les chaînes de Markov suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } M_4 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Question 4 Calcul du langage de M_1, M_2, M_3.
Le cas de M_4 est repoussé à la partie III.

a. Quel est le langage $L(M_1, \frac{1}{2})$?
b. Quel est le langage $L(M_2, \frac{1}{2})$?
c. Quel est le langage $L(M_3, \frac{1}{2})$?

Question 5 Calcul des valeurs propres de M_1, M_2, M_3, M_4.

a. Donner les valeurs propres ainsi que leur multiplicité pour M_1. Fournir une famille de k vecteurs propres indépendants pour chaque valeur propre de multiplicité k.
b. Donner les valeurs propres ainsi que leur multiplicité pour M_2. Fournir une famille de k vecteurs propres indépendants pour chaque valeur propre de multiplicité k.
c. Donner les valeurs propres ainsi que leur multiplicité pour M_3. Fournir une famille de k vecteurs propres indépendants pour chaque valeur propre de multiplicité k.
d. Verifier que les trois valeurs propres de M_4 sont : 1, $\rho_0 e^{i\theta_0}$, $\rho_0 e^{-i\theta_0}$ avec $\rho_0 = \sqrt{19}/10$ et $\theta_0 = \arccos(4/\sqrt{19})$, avec des vecteurs propres associées

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3}i \\ -1+\sqrt{3}i \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3}i \\ -1-\sqrt{3}i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Question 6 Soit M une chaîne de Markov de $\mathbb{R}^{N,N}$.

a. Montrer que toutes les valeurs propres v de M satisfont $|v| \in [0, 1]$.
On pourra considérer la matrice transposée de M.

b. Montrer que 1 est valeur propre de M.

PARTIE III. Base de vecteurs propres.

Soit M une chaîne de Markov de $\mathbb{R}^{N,N}$. Supposons que M ait exactement N valeurs propres distinctes que l'on décrira sous forme de coordonnées polaires : $\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_N e^{i\theta_N}$, avec $\rho_j \in [0,1]$ pour tout $j \leq N$. On classe les valeurs propres avec $\rho_1 \geq \cdots \geq \rho_N \geq 0$. Soit $V_1, \dots, V_N$ des vecteurs propres correspondants, i.e. V_j est non nul et $M \cdot V_j = \rho_j e^{i\theta_j} V_j$ pour tout j avec $1 \leq j \leq N$.

Question 7 Soit X une distribution de $\mathbb{R}^N$ et $\tau \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}^{N+1}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_k^{M,X,\tau} = A \text{ si et seulement si } \alpha_0 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \rho_j^k e^{ik\theta_j} \in \mathbb{R}^+.$$

Question 8 Montrer que pour M_4 donnée à la partie précedente, $\tau_4 = \frac{1}{3}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on a $(M_4^k \cdot X_4)(1) \geq \tau_4$ si et seulement si :

$$(\sqrt{3}\sin(k\theta_0) - \cos(k\theta_0)) \geq 0, \text{ avec } \theta_0 = \arccos(4/\sqrt{19})$$

On admettra pour la **Question 9** que pour tout ℓ entier non nul, l'ensemble $\{r\,\ell\,\theta_0 \mod 2\pi \mid r \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 2\pi[$.

On dit qu'une suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\sigma_n \in \{A, B\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est *ultimement périodique* si il existe un entier non nul $P \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qu'on appellera la période et un indice $\ell \in \mathbb{N}$ avec $\sigma_{\ell+r+Pk} = \sigma_{\ell+r}$ pour tout $r \in \{0, \dots, P-1\}$, et tout $k \in \mathbb{N}$.

Question 9 On considère la suite $(\sigma_k^{M_4,X_4,\tau_4})_{k\in\mathbb{N}}$ de la partie précédente. Montrer que $(\sigma_k^{M_4,X_4,\tau_4})_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas ultimement périodique.

Il est donc difficile de décrire explicitement même une trajectoire de la chaîne de Markov. On va s'intéresser dans la suite à un cas où on peut décrire explicitement non seulement chaque trajectoire, mais aussi l'ensemble de ces trajectoires.

PARTIE IV. Chaîne de Markov avec des valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$.

On veut maintenant calculer le language de la chaîne de Markov M_5 suivante, associée à $\tau_5 = \frac{5}{12}$ et

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Question 10

a. Calculer les valeur propres de M_5. Sont-elles réelles positives ? On note ρ_1, ρ_2, ρ_3 les 3 valeurs propres de M_5, avec $\rho_1 = 1$ et $\rho_2 > \rho_3$. Determiner des vecteurs propres V_1, V_2, V_3 respectifs associés, avec V_1 une distribution.

b. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Prenant $X = X_0$ puis $X = X_1$, donner des valeurs explicites pour $\alpha_1(X), \ldots, \alpha_3(X)$: $\mathit{Distrib} \mapsto \mathbb{R}^N$ tels que $\sigma_k^{X,\tau_5} = A$ si et seulement si $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j(X)\rho_j^k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c. Quelles sont les trajectoires $(\sigma_k^{M_5,X_0,\tau_5})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_k^{M_5,X_1,\tau_5})_{k\in\mathbb{N}}$ associées à X_0 et X_1 ?

Question 11 Soit $\lambda \in [0, 1]$. On définit $X_\lambda = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_0$.

a. Montrer que $\alpha_i(X_\lambda) = \lambda\alpha_i(X_1) + (1 - \lambda)\alpha_i(X_2)$.

b. Soit $\lambda \in [0, 1[$ (en particulier $X_\lambda \neq X_1$). Montrer qu'il existe $\ell_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $(\sigma_k^{X_\lambda,\tau_5})_{k\in\mathbb{N}}$ est B pour tout $0 \leq k < \ell_\lambda$, puis A pour tout $k \geq \ell_\lambda$.

Maintenant que nous avons démontré que chaque trajectoire était explicitement descriptible de manière finie, on va s'intéresser au langage de M_5 pour les distributions initiales dans l'ensemble $\{X_\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\}$.

Question 12

a. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, il existe $\mu_x \in]0, 1[$ avec

$$\mu_x \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(X_0)\rho_j^x + (1 - \mu_x) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(X_1)\rho_j^x = 0$$

b. Montrer que pour tout $\ell' \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda \in [0, 1]$ avec $\sigma_k^{M_5,X_\lambda,\tau_5} = B$ pour tout $k \leq \ell'$ et $\sigma_k^{M_5,X_\lambda,\tau_5} = A$ pour tout $k > \ell'$.

c. Existe-t-il $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell_\lambda < \ell$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$?

d. Décrire le langage de M_5 pour les distributions initiales dans l'ensemble $\{X_\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\}$, c'est à dire l'ensemble des suites $\{(\sigma_k^{M_5,X_\lambda,\tau_5})_{k\in\mathbb{N}} \mid \lambda \in [0, 1]\}$.

On propose maintenant de traiter un cas plus général.

On prend $N = 3$. Soit M une chaîne de Markov de $\mathbb{R}^3$ ayant des valeurs propres toutes réelles positives et distinctes deux à deux : $1 = \rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \geq 0$. Soit V_1 une distribution, vecteur propre associé à ρ_1, et V_2, V_3 deux vecteurs propres associés respectivement à ρ_2, ρ_3. Pour toute distribution X, on admettra qu'il existe $\alpha_0(X), \alpha_1(X), \alpha_2(X), \alpha_3(X)$ des réels tels que $\alpha_0(X) + \alpha_1(X)\rho_1^k + \alpha_2(X)\rho_2^k + \alpha_3(X)\rho_3^k \geq 0$ si et seulement si $\sigma_k^{M,X,\tau} = A$.

Soit τ tel que $\alpha_0(X) = \alpha_1(X) = 0$ pour toute distribution X. C'est le cas dès que $\tau = V_1(1)$. Soit X_0, X_1 deux distributions avec $\sigma_k^{M,X_0,\tau} = A$ et $\sigma_k^{M,X_1,\tau} = B$ pour tout $k \geq 0$. On pose $X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_0$ pour tout $\lambda \in [0,1]$.

Question 13 Quel est le langage $\{(\sigma_k^{M,X_\lambda,\tau})_{k\in\mathbb{N}} \mid \lambda \in [0,1]\}$?

On peut caractériser le langage de toute chaîne de Markov ayant des valeurs propres distinctes deux à deux et réelles positives, mais cela ne sera pas demandé ici.