Rapport sur l'oral de Mathématiques 2016.
Oral commun Cachan-Lyon-Paris-Rennes

Le jury de cette épreuve est constitué de Anne-Sophie de Suzzoni, Ayman Moussa, Vincent Minerbe et Michel Raibaut. 472 candidats ont passé l'épreuve. Chaque candidat est interrogé 45 minutes au tableau par l'un des examinateurs sans préparation.

1 Commentaires sur le déroulement des épreuves

Un but essentiel de l'oral est de juger de la capacité du candidat à analyser un problème. Comprendre où se situe la difficulté, faire des parallèles avec d'autres problèmes déjà connus, discuter du problème dans des cas particuliers pertinents est très apprécié. A ce titre, prendre quelques minutes pour étudier l'énoncé, sans se lancer tambour battant dans des calculs ou un raisonnement formaté peut être une bonne option. Par exemple, un énoncé contenant un entier naturel ne se prouve pas toujours par récurrence.

De façon générale, le jury attend des candidats un certain sens de l'initiative. Rester muet parce qu'on n'a pas la solution totale de l'exercice ne mène à rien. De même, proposer de nombreuses pistes différentes et attendre que le jury choisisse laquelle est la meilleure montre un manque d'autonomie. Rappelons ici que le niveau des oraux d'E.N.S. étant élevé, les exercices nécessitent en général un raisonnement long et progressif. Le jury en a pleinement conscience et attend du candidat qu'il lui montre son aptitude à raisonner, même si ce raisonnement est incomplet. L'aptitude à simplifier un problème, par exemple en montrant que le cas général peut se ramener à un sous-cas est perçue très positivement par le jury. De plus, elle permet concrètement de venir à bout de nombreux exercices. Par ailleurs, l'aptitude du candidat à juger qu'une piste est mauvaise et à se relancer sur une autre voie contribue à améliorer la note.

Faire des dessins, même dans des cas particuliers, même de façon simpliste, est souvent inspirant. Ce devrait être une initiative naturelle. Il est frappant de constater que nombre de candidats sont immédiatement débloqués quand l'examinateur leur donne comme indication de faire un dessin.

Le jury a constaté que de nombreux candidats rechignent à écrire leur (début de) preuve au tableau, préférant apparemment discourir et discuter le problème, dans un exercice d'éloquence parfois intéressant mais souvent inefficace. C'est très bien d'expliquer sa stratégie, mais c'est aussi très important d'écrire progressivement sa solution, de poser nettement les choses, d'établir fermement les étapes du raisonnement. Entretenir un certain flou est la meilleure façon de commettre des erreurs et de ne pas convaincre l'examinateur. Au contraire, une argumentation claire, progressive avec un effort de rédaction sera fortement valorisée.

Les examinateurs ont été surpris de la passivité de certains candidats, qui semblent attendre qu'on leur dise quoi faire. Ne montrer aucune motivation dans son attitude fait bien sûr mauvaise impression.

La prestation d'un candidat est jugée sur toute la durée de l'épreuve. Un mauvais début d'oral ne disqualifie pas le candidat. Celui-ci est invité à rester persévérant, positif, d'autant plus que ce type d'attitude est nécessaire au métier de chercheur auquel forment les E.N.S. Par ailleurs, la perception qu'a le candidat de sa prestation est souvent fausse, la notation tenant compte de la difficulté des questions, qui est forcément inégale. Cette dernière remarque doit là encore inciter le candidat à rester concentré jusqu'au bout.

2 Difficultés spécifiques

Le jury a constaté avec surprise et déception des lacunes sur des points de cours aussi variés que fondamentaux chez de nombreux candidats, ce qui l'incite dans le futur à prévoir des questions de cours en lien avec les exercices. Certains candidats ignorent par exemple la définition du rayon de convergence d'une série entière, les hypothèses des théorèmes d'intégration terme à terme ou de convergence dominée, le lien entre matrices orthogonales et isométries linéaires de l'espace euclidien... Certains semblent penser que toute suite bornée a une valeur d'adhérence ou peinent à donner un contre-exemple en dimension infinie.

Les difficultés des candidats en calcul différentiel ont frappé le jury. Les définitions les plus élémentaires et usuelles (gradient, matrice jacobienne, différentielle) sont inconnues de beaucoup de candidats, donnant lieu à des horreurs insoutenables. La dérivation d'une composée ne devrait pas être un exercice aussi discriminant, la différentiation de l'inversion matricielle devrait être classique.

Le cours de probabilités est connu de façon variable. Le jury a noté que la définition des tribus était plutôt bien intégrée, mais que beaucoup de candidats étaient assez embarrassés quand on leur demandait ce qu'était une probabilité, un évènement, une variable aléatoire, une loi ; en particulier, le lien avec la notion de tribu n'était pas établi. Il s'est dégagé une grande impression de superficialité chez plusieurs candidats, comme s'ils manipulaient des symboles (« P ») et pas des objets mathématiques.

Certaines preuves classiques et élémentaires ont posé des difficultés insurmontables. Par exemple, tous les candidats semblent savoir qu'une fonction périodique et continue est uniformément continue, mais peu savent réellement le prouver. Savoir démontrer efficacement ce type de petits résultats proches du cours est une compétence attendue.

Enfin, les capacités calculatoires des candidats étaient très hétérogènes. Certains ont éprouvé des difficultés à factoriser des sommes de produits et à développer des produits de sommes. De façon générale, le jury recommande aux candidats de détailler leurs calculs au tableau. Sauter des étapes n'impressionne jamais l'examinateur et c'est une source d'erreurs commune.

3 Exemples d'exercices et commentaires

Exercice

On considère l'espace vectoriel normé $C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme $\|.\|_1$ définie par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

pour tout $f \in C^0([0,1])$.
On fixe un entier d et on note V_d le sous-espace vectoriel formé des fonctions polynomiales de degré au plus d.

1. On considère deux fonctions g et h appartenant à $C^0([0,1])$. On suppose que l'ensemble des zéros de g, noté $Z(g)$, est une réunion finie d'intervalles. On considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} G & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \|g+th\|_1 \end{array}.$$

Montrer que G est dérivable en 0 si seulement si $\int_{Z(g)} |h(x)|\, dx = 0$.
Vérifier qu'alors

$$G'(0) = \int_{[0,1]\setminus Z(g)} h(x).\mathrm{signe}(g(x))dx.$$

2. On fixe une fonction f de $C^0([0,1])$. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} F & : & V_d & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & \|f-P\|_1 \end{array}$$

   (a) Montrer que cette fonction admet un minimum.
   (b) Montrer que si P réalise le minimum alors la fonction $f-P$ s'annule au moins $d+1$ fois.
   (c) En déduire que ce minimum est unique.

Commentaire. Cet exercice a été posé sous la forme précédente, puis en admettant la première question. La première question découle de l'usage du taux d'accroissement et du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Le problème de la limite de la fonction $\varepsilon \mapsto \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon}$ en 0 a causé de nombreux soucis ! La question (2.a) se traite aisément en remarquant qu'une suite minimisante de polynômes vers la borne inférieure de la fonction F admet une valeur d'adhérence comme suite bornée dans un espace de dimension finie. Cette question a été posée plusieurs fois au cours des semaines d'oral et a mis dans l'embarras beaucoup de candidats. En particulier le jury a pu constater que, pour certains d'entre eux, l'espace des polynômes est compact, ou que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence sans aucune considération de dimension. La question (2.b) se traite par l'absurde, en utilisant la première question avec $g = f - P$ et en choisissant un polynôme h tel que le produit h.signe$(f-P)$ soit de signe de constant, ce qui donne la contradiction. La question de l'unicité (2.c) découle de la convexité de la norme et de l'usage de $f - \frac{P_1+P_2}{2}$, où P_1 et P_2 réalisent le minimum.

Exercice

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ on note F_A l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ dont le gradient est borné et satisfait la relation $\nabla f(x) \perp Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) aucune valeur propre de A n'appartient à l'axe imaginaire pure ;

(ii) F_A ne contient que des fonctions constantes.

Pour $(ii) \Rightarrow (i)$, on pourra utiliser puis montrer le fait suivant : si $A \in M_n(\mathbb{R})$ possède une valeur propre sur l'axe imaginaire pur, alors il existe $S \in S_n(\mathbb{R})$ non nulle à valeurs propres positives telle que $SA + {}^tAS = 0$.

Commentaire. Grâce à la relation d'orthogonalité ,nous observons que la fonction f est constante le long de toute courbe solution de $y' = Ay$. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ se prouve alors en constatant qu'une telle courbe tend vers 0 (en plus ou moins l'infini) lorsque initialisée sur certains sous-espaces associés à la matrice A. Cela implique que sur chacun de ces sous-espaces f est constante de valeur $f(0)$. En utilisant le caractères lipschitzien de f (grâce à la borne sur son gradient), on étend ce comportement à tout l'espace. Le sens inverse est obtenu en suivant l'indication de l'énoncé et en considérant l'application $g(x) = \langle Sx, x\rangle$ dont le gradient $2Sx$ est bien orthogonal en tout point à Ax, puisque la matrice SA est anti-symétrique. Il faut alors travailler un petit peu plus pour transformer g en une fonction de gradient borné tout en conservant la propriété (i) (en la composant à gauche par une fonction appropriée). Enfin, l'indication se démontre en notant que si z est un vecteur propre complexe de la transposée de A, associé à la valeur propre λ, la matrice $S := z{}^t\bar{z} + \bar{z}{}^tz$ est symétrique de valeurs propres positives et vérifie $SA +{}^t AS = (\lambda + \bar{\lambda})z{}^t\bar{z}$.

Exercice

Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$, $i = 1, 2$, deux espaces de probabilité. Pour $i = 1, 2$, soit $X_i : \Omega_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout t, $X_i(t) : \omega \mapsto X_i(t, \omega)$ est une variable aléatoire discrète réelle et, pour tout $\omega \in \Omega_i$, $t \mapsto X_i(\cdot, \omega)$ est une fonction $\mathcal{C}^2$.

1. On suppose que $X_1(0)$ et $X_2(0)$ ont la même loi et, pour $i = 1, 2$:

$$\forall \omega \in \Omega_i, \forall t, \quad X_i'(t, \omega) = tX_i(t, \omega).$$

   Montrer que, pour tout t, $X_1(t)$ et $X_2(t)$ ont la même loi.

   On suppose à présent que $(X_1(0), X_1'(0))$ et $(X_2(0), X_2'(0))$ sont injectives, de même loi et de même image.

2. Montrer que si X_1 et X_2 sont deux solutions de

$$\forall \omega \in \Omega_i, \forall t, \quad X_i''(t, \omega) + a(t)X_i'(t, \omega) + b(t)X_i(t, \omega) = 0$$

   avec a et b de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors, pour tout t, $X_1(t)$ et $X_2(t)$ ont la même loi.

3. On suppose que Ω_1 et Ω_2 sont finis et que X_1 et X_2 sont deux solutions de

$$\forall \omega \in \Omega_i, \forall t, \quad X_i''(t, \omega) + a(t)X_i'(t, \omega) + b(t)\mathbb{E}(X_i(t)) = 0.$$

   Montrer que $X_1(t)$ a la même loi que $X_2(t)$ pour tout t.

Commentaire. On peut répondre à la première question en résolvant explicitement l'équation.

La deuxième question a d'abord été posée sans l'hypothèse d'injectivité. On peut y répondre en posant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application qui à $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ associe $(x(t), x'(t))$ où x est l'unique solution de $x'' + ax' + bx = 0$ telle que $(x(0), x'(0)) = (x_0, x_1)$. L'application $u(t)$ est linéaire et injective par unicité des solutions. On a alors

$$P_1((X_1(t), X_1'(t)) = (x, y)) = P_1((X_1(0), X_1'(0)) = u(t)^{-1}(x, y)).$$

L'égalité des lois au temps $t = 0$ donne le résultat.

Alternativement, sous l'hypothèse d'injectivité, on peut poser $\varphi = (X_1(0), X_1'(0))^{-1} \circ (X_2(0), X_2'(0))$. Cette application va de Ω_2 dans Ω_1 et satisfait par égalité des lois de $(X_1(0), X_1'(0))$ et $(X_2(0), X_2'(0))$: pour tout $A_1 \in \mathcal{A}_1$,

$$P_1(A_1) = P_2(\varphi^{-1}(A_1)).$$

Par ailleurs, par unicité des solutions de $y'' + ay' + by = 0$, on a $X_1 \circ \varphi = X_2$, ce qui entraîne l'égalité des lois en tout temps.

Pour la troisième question, comme Ω_i est fini,

$$\mathbb{E}(X_i(t)) = \sum_{\omega \in \Omega_i} X_i(t, \omega) P_i(\{\omega\})$$

est bien défini et dérivable deux fois, et $\mathbb{E}(X_i(t))$ satisfait pour $i = 1, 2$ l'équation $y''+ay'+by = 0$ avec la même donnée initiale pour $i = 1, 2$. En effet, l'égalité des lois entraîne l'égalité des espérances. En posant $\phi(t) = \mathbb{E}(X_i(t))$, on a que $X_1(t)$ et $X_2(t)$ satisfont tous deux $y'' + ay' + b\phi = 0$ et on peut résoudre le problème comme à la question précédente.

La question 1 n'a dans l'ensemble pas posé de problème excepté pour les candidats qui n'écrivaient pas la dépendance de la solution en la donnée initiale, ou ceux qui ne connaissaient pas la définition d'une loi. La seconde question a permis au jury de se rendre compte que certains candidats ignoraient que l'ensemble noté $(X = x)$ correspondaient à $X^{-1}(\{x\})$. Cela entraînait quelques confusions, par exemple, il a été vu $P_1(A)$ avec A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. La troisième question a peu été traitée.

Exercice

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

1. Montrer que si $x, y, v, w \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs de norme 1, avec $x \perp v$ et $y \perp w$, alors il existe $g \in SO(n)$ tel que $g(x) = y$ et $g(v) = w$.
2. Soit b une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ telle que
$$\forall g \in SO(n),\ \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \quad b(g(v), g(w)) = b(v, w).$$
Que dire de b ?
3. Soit E l'espace des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$. Décrire les sous-espaces F de E tels que
$$\forall b \in F,\ \forall g \in SO(n), \quad b(g(.), g(.)) \in F.$$

Commentaire. La première question a posé des difficultés imprévues, dénotant un certain manque de lucidité. Elle peut se résoudre par exemple en observant qu'une rotation envoie x sur y ; comme $SO(n)$ est un groupe, on est ainsi ramené au cas où x et y sont égaux et alors une rotation dans l'orthogonal de $x = y$ permet d'envoyer v sur w. La deuxième question s'appuie sur la première : on montre que b est symétrique, puis que c'est un multiple du produit scalaire euclidien, via le théorème spectral. La troisième repose sur des idées similaires : les quatre possibilités pour F sont $\{0\}$, E, la droite engendrée par le produit scalaire et le sous-espace des formes bilinéaires symétriques de trace nulle dans une base orthonormée.