ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CONCOURS D'ADMISSION - SESSION 2017

FILIÈRE BCPST

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Cachan, Lyon, Paris et à l'ENPC

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

⋆ ⋆ ⋆

L'épreuve est composée de cinq parties. Les quatre premières parties sont indépendantes. On pourra admettre les résultats des quatre premières parties pour traiter la cinquième partie.

Soit a_1, a_2 et c des cœfficients réels donnés. On se propose de contrôler le comportement, quand t tend vers $+\infty$, des fonctions x_1, y_1, x_2 et y_2 dérivables dans $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, solutions sur $[0,+\infty[$ des équations différentielles

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = -a_1 x_1(t) - 2y_1(t) + c\big(x_1(t) - x_2(t)\big) \\ x_2'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -a_2 x_2(t) - 2y_2(t) + c\big(x_2(t) - x_1(t)\big). \end{array} \right.$$

Plus précisément on se propose de montrer que sous certaines conditions sur les cœfficients, il existe des constantes réelles $C > 0$ et K telles que pour toutes fonctions x_1, y_1, x_2, y_2 solutions de $(*)$, on a pour tout $t \geq 0$

$$x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq C\Big(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2\Big)\, e^{-Kt}.$$

Partie 1 (solutions constantes)

1-1. On suppose que $c(a_1 + a_2) \neq a_1\, a_2$. Montrer que les fonctions x_1, y_1, x_2, y_2 solutions de $(*)$ sont constantes sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$.

1-2. On suppose que $c(a_1 + a_2) = a_1\, a_2$. Montrer qu'il existe des fonctions x_1, y_1, x_2, y_2 solutions de $(*)$, constantes mais non toutes nulles sur $[0,+\infty[$.

Partie 2 ($a_1 = a_2 = 2,\ c = -\frac{3}{2}$)

2-1. (Question préliminaire) Étant donné un réel $\omega > 0$, expliciter les fonctions x et y solutions sur $[0, +\infty[$ des équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -(1+\omega^2)x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

en fonction de leurs valeurs $x(0)$ et $y(0)$ en $t = 0$. (On pourra pour cela vérifier qu'une telle fonction x est nécessairement solution de l'équation différentielle du deuxième ordre $x''(t) + 2x'(t) + (1+\omega^2)x(t) = 0$.)

2-2. (Question préliminaire) Montrer que pour tous réels positifs u et v, on a

$$u^2 + v^2 \leq (u+v)^2 \leq 2\,(u^2 + v^2).$$

Dans cette **Partie 2** on suppose que $a_1 = a_2 = 2,\ c = -\frac{3}{2}$.

Soit alors une solution $x_1,\ y_1,\ x_2, y_2$ de $(*)$, et soit les fonctions

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad X_i = x_i - X, \qquad Y_i = y_i - Y, \qquad i = 1, 2.$$

2-3. Écrire les équations différentielles vérifiées par le couple (X, Y) et en déduire son expression explicite à l'aide de **2-1**.

2-4. Pour $i = 1, 2$ écrire les équations différentielles vérifiées par le couple (X_i, Y_i) et en déduire son expression explicite à l'aide de **2-1**.

2-5. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$ de $(*)$, on a pour tout $t \geq 0$

$$|x_1(t)| + |y_1(t)| + |x_2(t)| + |y_2(t)| \leq C\Big(|x_1(0)| + |y_1(0)| + |x_2(0)| + |y_2(0)|\Big)\, e^{-t}.$$

(On pourra expliciter $x_1(t),\ y_1(t),\ x_2(t),\ y_2(t)$ en fonction des valeurs $x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)$ en $t = 0$.)

2-6. En déduire, à l'aide de **2-2**, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution $x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2$ de $(*)$, on a pour tout $t \geq 0$

$$x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq C\Big(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2\Big)\, e^{-2t}.$$

2-7. (Exemple) Dans cette question on suppose que $x_1(0) = x_2(0) = 1 + \sqrt{5}$ et $y_1(0) = y_2(0) = 2$. Montrer qu'il existe une constante $D > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$

$$D\Big(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2\Big)\, e^{-2t} \leq x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2.$$

Partie 3

3-1. (Question préliminaire) Montrer que pour tous réels x et y et tout réel $\varepsilon > 0$ on a

$$-\varepsilon x^2 - \frac{y^2}{\varepsilon} \leq 2xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{\varepsilon}\cdot$$

3-2. (Question préliminaire) Pour des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha\beta > 1$, déduire de **3-1** qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous réels x et y

$$\frac{1}{C}(x^2 + y^2) \leq \alpha x^2 + 2xy + \beta y^2 \leq C(x^2 + y^2).$$

3-3. Étant donnés des cœfficients réels α_1, α_2, β et des solutions x_1, x_2, y_1, y_2 de $(*)$, soit

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \alpha_i x_i(t)^2 + 2x_i(t)y_i(t) + \beta y_i(t)^2.$$

Donner l'expression de $f'(t)$ en fonction des cœfficients α_1, α_2, β, a_1, a_2, c et des solutions x_1, x_2, y_1, y_2. En déduire, à l'aide de **3-1**, que pour tout $\varepsilon > 0$, on a en tout $t \geq 0$

$$f'(t) \leq \sum_{i=1}^{2} -\big(a_i - c - |c| - \varepsilon\big)\, x_i(t)^2 + \big(\alpha_i - 2 - a_i\beta + \beta c\big)\, x_i(t)y_i(t) - \left(2\beta - 1 - \frac{\beta^2 c^2}{4\varepsilon}\right) y_i(t)^2.$$

Dans cette **Partie 3** on suppose désormais que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et c sont tels que $-2\sqrt{a} < c < 2\sqrt{4+a} - 4$, avec $a = \inf\{a_1, a_2\}$.

3-4. Montrer qu'il existe des cœfficients α_1, α_2, β et $\varepsilon > 0$ tels que pour $i = 1, 2$ on ait

$$\begin{array}{lrl}
(\mathbf{1}). & 2\beta - 1 - \dfrac{\beta^2 c^2}{4\varepsilon} & > 0 \\
(\mathbf{2}). & \alpha_i - 2 - a_i\beta + \beta c & = 0 \\
(\mathbf{3}). & \alpha_i > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha_i\beta & > 1 \\
(\mathbf{4}). & a_i - c - |c| - \varepsilon & > 0.
\end{array}$$

(On pourra d'abord considérer le cas où $c = 0$. Dans le cas où $c \neq 0$, on pourra vérifier que les conditions **(1).** à **(4).** sont satisfaites pour $\beta = \dfrac{4\varepsilon}{c^2}$, $\alpha_i = 2 + \beta(a_i - c)$ pour $i = 1, 2$, et enfin $\varepsilon \in \left]\dfrac{c^2}{4}, a\right[$ si $c < 0$, $\varepsilon \in \left]\dfrac{c^2}{4}, a - 2c\right[$ si $c > 0$.)

3-5. Avec les cœfficients construits en **3-4**, déduire de **3-2** qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$f'(t) \leq -Kf(t)$$

pour tout $t \geq 0$. En déduire que pour tout $t \geq 0$

$$f(t) \leq f(0)\, e^{-Kt}.$$

3-6. En déduire qu'il existe des constantes $C > 0$ et $K > 0$ telles que pour toute solution x_1, y_1, x_2, y_2 de $(*)$, on a pour tout $t \geq 0$

$$x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq C\Big(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2\Big)\, e^{-Kt}.$$

Partie 4

4-1. (Question préliminaire) Soit λ un réel et M une matrice à d lignes et d colonnes, à cœfficients M_{ij} réels, diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et dont les valeurs propres ont toutes une partie réelle inférieure ou égale à λ.

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que si $z_1, \ldots, z_d$ sont des fonctions dérivables dans $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, solutions sur $[0, +\infty[$ des équations différentielles

$$z_i'(t) = M_{i1}\, z_1(t) + \cdots + M_{id}\, z_d(t)$$

pour $i = 1, \ldots, d$, alors pour $i = 1, ..., d$ et $t \geq 0$ on a

$$|z_i(t)| \leq C\Big(|z_1(0)| + \cdots + |z_d(0)|\Big)\; e^{\lambda\, t}.$$

(On pourra d'abord considérer le cas particulier où M est diagonale, puis diagonaliser M dans le cas général.)

Dans cette **Partie 4** on suppose que les cœfficients a_1, a_2 et c sont des réels quelconques.

Soit alors une solution x_1, y_1, x_2, y_2 de $(*)$, et soit les fonctions

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = y_1, \quad z_4 = y_2.$$

4-2. Expliciter la matrice M à 4 lignes et 4 colonnes, de cœfficients M_{ij}, telle que les fonctions z_1, z_2, z_3, z_4 sont solutions sur $[0, +\infty[$ des équations différentielles

$$z_i'(t) = M_{i1} z_1(t) + M_{i2} z_2(t) + M_{i3} z_3(t) + M_{i4} z_4(t)$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$.

4-3. Écrire cette matrice M à l'aide de 4 matrices O, I, N et $-2I$ à 2 lignes et 2 colonnes, sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} O & I \\ N & -2\,I \end{pmatrix}$$

où O est la matrice nulle, I la matrice identité et N une matrice à expliciter en fonction de a_1, a_2 et c.

4-4. Sans calculer explicitement les valeurs propres de N, montrer que N est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Calculer les valeurs propres n_- et n_+ de N avec $n_- \leq n_+$.

4-5. Étant donnés deux vecteurs u et v de $\mathbb{C}^2$ et un nombre m de $\mathbb{C}$, montrer que le vecteur (u, v) de $\mathbb{C}^4$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre m, si et seulement si u est un vecteur propre de N associé à la valeur propre $n = m^2 + 2m$ et $v = m\,u$.

4-6. Déduire de **4-4** et **4-5** que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les valeurs propres n_- et n_+ sont toutes deux différentes de -1.

4-7. Si n_- et n_+ sont toutes deux différentes de -1, déduire de **4-1** qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute solution x_1, y_1, x_2, y_2 de $(*)$, on a pour tout $t \geq 0$

$$x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq C\Big(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2\Big)\, e^{2\lambda t}$$

avec $\lambda = -1$ si $n_+ < -1$, et $\lambda = -1 + \sqrt{1 + n_+}$ si $n_+ > -1$ et $n_- \neq -1$.

Partie 5

Comparer les résultats obtenus dans les parties 1 à 4.