Banque BCPST Inter-ENS/ENPC - Session 2017

Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques
(épreuve comptant uniquement pour l'admission)

Écoles concernées : ENS (Paris) - ENS de Lyon - ENS de Paris-Saclay - ENPC

Coefficients (en pourcentage du total d'admission) :
ENS de Paris-Saclay : 6.2%
ENS de Lyon : 6.6% pour les deux options
ENS (Paris) : 11.3% pour les deux options
ENPC : 20%

—— o ——

Membre du jury : François Bolley

L'épreuve est composée de cinq parties. Elle propose l'étude de fonctions x_1, y_1, x_2, y_2 solutions du système d'équations différentielles

$$(*) \begin{cases} x_1'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = -a_1 x_1(t) - 2y_1(t) + c\big(x_1(t) - x_2(t)\big) \\ x_2'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = -a_2 x_2(t) - 2y_2(t) + c\big(x_2(t) - x_1(t)\big). \end{cases}$$

On peut interpréter ce système comme gouvernant l'évolution de deux particules $i = 1, 2$, de masse 1, l'état de la particule i étant donné à l'instant $t \geq 0$ par sa position $x_i(t)$ et sa vitesse $y_i(t)$ dans $\mathbb{R}$; la force s'exerçant sur la particule $i = 1$ (par exemple) est alors

$$-a_1 x_1(t) - 2y_1(t) + c\big(x_1(t) - x_2(t)\big),$$

ce dernier terme $c\big(x_1(t) - x_2(t)\big)$ étant une force d'interaction entre les particules 1 et 2. Cette interprétation n'est pas nécessaire pour traiter le sujet.

En particulier, et notamment dans les parties 2, 3, 4 et sous diverses hypothèses sur les cœfficients a_1, a_2, et c, on cherche à montrer l'existence de constantes réelles $C > 0$ et K telles que

$$(**) \qquad x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2 \leq C\Big(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2\Big)\, e^{-Kt}$$

pour toute solution $(x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2)$ et tout $t \geq 0$. Pour $K > 0$ ceci implique en particulier que $x_i(t) \to 0$, $y_i(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, avec un "taux de convergence" en $e^{-Kt/2}$.

Ce sujet a permis de tester les candidats sur leur aisance à manipuler les techniques et outils classiques d'analyse et algèbre linéaire au programme des classes préparatoires BCPST. Les notes obtenues par les candidats admissibles sont comprises entre 1.40 et 17.90 sur 20, avec une moyenne de 8.60 et un écart type de 3.40. La précision de la rédaction et l'honnêteté des candidats dans leurs démonstrations ont été récompensées. Inversement, les rares candidats ayant tenté d'imposer leurs résultats par des affirmations non justifiées ont été sanctionnés.

La **partie 1** s'intéresse aux solutions constantes du système $(*)$. On doit remarquer que (x_1, y_1, x_2, y_2) est une solution constante si et seulement si $y_1 = y_2 = 0$ et (x_1, x_2) est solution du système linéaire à deux équations et deux inconnues

$$\begin{cases} 0 = -a_1 x_1 + c\big(x_1 - x_2\big) \\ 0 = -a_2 x_2 + c\big(x_2 - x_1\big). \end{cases}$$

On en déduit alors les propriétés énoncées dans les questions 1-1 et 1-2 par manipulation sur ces deux équations, ou en remarquant que le déterminant du système linéaire ci-dessus est $a_1a_2 - c(a_1 + a_2)$.

La partie 1 a globalement été bien traitée par les candidats. De nombreux candidats ont cependant perdu du temps dans des manipulations sur les équations qui les ont conduits à distinguer les cas où c, a_i ou $c - a_i$ est nul ou non, ce dont on peut se passer. Par ailleurs, dans la question 1-1 on demande en particulier de mentionner, d'une manière ou d'une autre, que $(0, 0, 0, 0)$ est bien une solution du système $(*)$.

La **partie 2** débute par deux questions préliminaires qui ont été résolues par un grand nombre de candidats. Dans la question 2-1, après avoir établi que la solution $x(t)$ est de la forme $e^{-t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ en utilisant par exemple l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 + \omega^2 = 0$, on demande notamment d'exprimer A et B en fonction de $x(0)$ et $y(0)$. Il s'agit d'une question classique, et l'on s'attendait à ce que tous les candidats la résolvent intégralement, ce qui n'a pas été le cas.

La question 2-2, préliminaire également, demande de montrer deux inégalités qui peuvent paraître astucieuses, mais sont simples à vérifier - en faisant par exemple apparaître un carré pour l'inégalité de droite - et extrêmement utiles dans de nombreuses majorations.

Dans la suite de la partie 2 on considère une solution (x_1, y_1, x_2, y_2) de $(*)$ dans le cas particulier où $a_1 = a_2 = 2$, et $c = -3/2$, que l'on étudie, par résolution explicite, à l'aide des "position moyenne" X et "vitesse moyenne" Y et des "variations en position autour de la moyenne" X_i et "variations en vitesse autour de la moyenne" Y_i.

Dans la question 2-3 on montre que X et Y sont solutions de l'équation différentielle étudiée dans la question 2-1 avec $\omega = 1$, en écrivant respectivement les demi-sommes des première et troisième lignes de $(*)$, puis des deuxième et quatrième lignes. On en déduit alors l'expression explicite de $X(t)$ et $Y(t)$, grâce à 2-1. Dans la question 2-4 on procède de même sur les X_i et Y_i, cette fois avec $\omega = 2$. Dans la question 2-5 on revient aux fonctions originales x_i et y_i. En 2-3 (resp. 2-4) on a obtenu l'expression explicite de $X(t)$ (resp. $X_i(t) = x_i(t) - X(t)$); en 2-5 on peut alors en déduire celle de $x_i(t) = X(t) + X_i(t)$, puis de même celle de $y_i(t) = Y(t) + Y_i(t)$. Ces expressions sont toutes de la forme $e^{-t}(A_1x_1(0) + B_1y_1(0) + A_2x_2(0) + B_2y_2(0))$ où A_1, B_1, A_2 et B_2 sont des combinaisons linéaires de cosinus et sinus (pour des cœfficients égaux à des constantes numériques). Bornant les cosinus et sinus par 1, on en déduit la majoration demandée en 2-5. Cette question peut être longue à rédiger si on suit toutes les constantes numériques précisément (et dans ce cas la constante numérique finale C est explicite), mais on peut aboutir au résultat final sans cela (et pour une certaine constante numérique C qu'on ne connaît alors pas explicitement; notons qu'on ne demandait pas une valeur explicite). Dans la question 2-6 on cherche à en déduire $(**)$, c'est-à-dire à passer d'un contrôle sur les valeurs absolues à un contrôle sur leurs carrés. Il faut élever au carré l'inégalité obtenue en 2-5; appliquer au membre de gauche ainsi obtenu l'inégalité de gauche de 2-2 (par exemple deux fois, ayant maintenant quatre termes); appliquer, au membre de droite, l'inégalité de droite de 2-2 (de même, par exemple en deux fois, ce qui fait apparaître un cœfficient 4 qui n'a été repéré que par peu de candidats).

Dans la question 2-7 on montre que la constante $K = 2$ obtenue dans l'exponentielle de la question 2-6 est optimale, en donnant un exemple de donnée initiale pour laquelle on a, dans $(**)$, une inégalité dans l'autre sens avec toujours $K = 2$ (et une constante D différente de C). Ainsi le "taux de convergence" des $x_i(t)$ et $y_i(t)$ vers 0 est-il bien de l'ordre de $e^{-Kt/2}$. Pour cela il faut utiliser les expressions explicites de $x_1(t), y_1(y), x_2(t), y_2(t)$ puis de $x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_2(t)^2$, obtenues grâce à 2-3 et 2-4, les données initiales ayant été choisies pour que ces expressions soient simples. Il faut ensuite minorer cette dernière quantité en fonction de $x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + x_2(0)^2 + y_2(0)^2$, et non plus la majorer comme en 2-5 - 2-6. Il semble que seuls quelques candidats aient compris cette question.

La **partie 3** débute par deux questions préliminaires, utiles également dans de nombreuses majorations. Dans la question 3-2 plusieurs candidats n'ont pas compris que les réels α et β sont fixés, et qu'on peut utiliser 3-1 avec un ε bien choisi en fonction de α et β; il faut alors repérer à quel moment la contrainte $\alpha\beta > 1$ doit être utilisée.

Dans la suite de la partie 3 on considère alors une solution de $(*)$. On cherche à montrer une propriété telle que $(**)$ sur la quantité $f(t)$, les questions 3-3 à 3-5 aboutissant à la majoration $f(t) \leq f(0)e^{-Kt}$. Dans la question 3-6 on utilise alors 3-2 pour d'une part majorer $f(0)$ par $C_1(x_1(0)^2 + y_1(0)^2 + \dots)$, et d'autre part minorer $f(t)$ par $C_2(x_1(t)^2 + y_1(t)^2 + \dots)$ avec des constantes numériques (non explicites) C_1 et C_2. On en déduit $(**)$ avec $C = C_1/C_2$.

Dans la question 3-3 on calcule explicitement $f'(t)$. Ce calcul ne présente pas de difficulté (mais un peu de concentration) et pourtant de nombreux candidats se sont trompés dans le calcul, notamment pour avoir oublié que $\frac{d}{dt}x(t)^2 = 2x'(t)x(t)$, et non seulement $2x(t)$. On obtient alors une combinaison linéaire de termes x_i^2, y_i^2, x_iy_i avec $i = 1, 2$, que l'on conserve, et de termes x_1y_2 et x_2y_1 que l'on majore en fonction des x_i^2 et y_i^2, à l'aide de 3-1. Dans la question 3-4 on montre notamment que pour certains α_i et β bien choisis les cœfficients de $x_i(t)^2$ et $y_i(t)^2$ obtenus dans la majoration de 3-3 sont strictement positifs, et que le cœfficient de $x_i(t)y_i(t)$ est nul. De nombreux candidats ont répondu partiellement à cette question grâce aux indications, mais jamais intégralement et de manière satisfaisante.

Ainsi, avec les cœfficients α_i et β construits en 3-4, la majoration de 3-3 assure l'existence d'une constante $D > 0$ telle que

$$f'(t) \leq -D \sum_{i=1}^{2} \left[x_i(t)^2 + y_i(t)^2\right]$$

qui est $\leq -Kf(t)$ pour un $K > 0$ grâce à l'inégalité de droite de 3-2 et la condition $\alpha_i\,\beta > 1$. L'équation différentielle $f'(t) = -Kf(t)$ de solution $f(t) = f(0)e^{-Kt}$ semble bien connue de la plupart des candidats. Ici, on aboutit à l'inéquation différentielle $f'(t) \leq -Kf(t)$ et on s'attend à un raisonnement pour en déduire la majoration $f(t) \leq f(0)e^{-Kt}$ annoncée dans l'énoncé. Pour cela, et comme certains candidats l'ont très bien remarqué, on peut mentionner que $f(t) > 0$ et diviser par $f(t)$: on obtient $(\ln f(t))' \leq -K$, que l'on intègre; on peut aussi multiplier par e^{Kt} et reconnaître $(e^{Kt}f(t))' \leq 0$, que l'on intègre.

Si la partie 3 permet de montrer une inégalité telle que $(**)$ à l'aide, essentiellement, de l'inégalité obtenue en 3-1 et d'un bon choix de fonction f, la **partie 4** vise à montrer $(**)$ par un argument d'algèbre linéaire.

La question 4-1 permet, de manière générale, de déduire une inégalité impliquant $(**)$ pour la solution d'un système d'équations différentielles généralisant $(*)$. Le cas où M est diagonale a été relativement bien traité (mis à part de fréquents oublis de valeurs absolues ou modules dans les majorations) : si $z_i'(t) = M_{ii}\, z_i(t)$ avec $M_{ii} \leq \lambda$ alors $z_i(t) = z_i(0)e^{M_{ii}t}$ puis $|z_i(t)| \leq |z_i(0)|e^{\lambda t}$. Dans le cas où M est seulement diagonalisable, de la forme $P\Delta P^{-1}$ avec P inversible de taille (d, d) et $\Delta = diag(\delta_1, \dots, \delta_d)$ diagonale, alors notant $Z(t) = (z_1(t), \dots, z_d(t))$ on montre que le vecteur $Y(t) = P^{-1}Z(t)$ est de coordonnées $y_j(t)$ telles que $y_j'(t) = \delta_j y_j(t)$, de sorte que $y_j(t) = y_j(0)e^{\delta_j t}$ puis $|y_j(t)| \leq |y_j(0)|e^{\lambda t}$. La relation $Z(t) = PY(t)$, soit $z_i(t) = \sum_{j=1}^{d} P_{ij} y_j(t)$ pour $i = 1, \dots, d$, permet de revenir aux z_i. Le cas diagonalisable n'a été traité que dans de très bonnes copies.

Les questions 4-2 à 4-6 permettent de s'assurer que l'on peut appliquer le résultat général de la question 4-1 au système $(*)$. La question 4-7 permet alors de conclure.

La question 4-2 demande d'expliciter la matrice M pour laquelle le système $(*)$ se met sous la forme de la question 4-1. Cette question, ainsi que la suivante, a bien été traitée par la grande majorité des candidats l'ayant abordée. Pour estimer les valeurs propres de M (ainsi que le demande la question 4.1), on propose dans la question 4-3 de décomposer M en quatre blocs $0, I, N$ et $-2I$. Dans la question 4-4 on demande de montrer que N est diagonalisable (elle est symétrique réelle) et de calculer ses valeurs propres. Il n'est pas nécessaire de calculer les vecteurs propres, ce que de nombreux candidats ont réalisé, ou tenté (les vecteurs propres n'interviennent dans le résultat final que dans la matrice de passage P, et donc dans la constante C, que l'on ne demande pas de préciser). Dans la question 4-5 on relie les valeurs et vecteurs propres de M à ceux de N, uniquement dans le but de déterminer dans quel cas M est diagonalisable (question 4-6) et d'estimer ses valeurs propres (cf. question 4-1). Dans cette question on s'attendait à ce que les candidats mentionnent le fait qu'un vecteur propre est non nul, et s'en assurent dans leurs raisonnements.

Pour $n_-, n_+ \neq -1$ on peut alors appliquer le résultat général de la question 4-1 et en déduire les inégalités de la question 4-7, c'est-à-dire (**).

Si les questions 4-2 à 4-5 ont été traitées dans de nombreuses copies, les questions finales 4-6 et 4-7 demandent un peu de recul sur cette partie (et probablement de temps en cette fin d'épreuve) et n'ont quasiment pas été abordées.

La **partie 5** demande aux candidats de prendre du recul sur les quatre premières parties. Il n'était pas nécessaire d'aborder cette partie ouverte pour avoir une excellente note, et cette partie n'a été abordée de manière conséquente que par une douzaine de candidats. Voici quelques remarques que l'on pouvait faire.

La partie 1 donne une condition nécessaire et suffisante pour que $(0,0,0,0)$ soit la seule solution constante de $(*)$.

Les parties 2 et 3 donnent des conditions suffisantes sur les cœfficients a_1, a_2 et c assurant la propriété $(**)$ avec $K > 0$. Si cette propriété $(**)$ est vérifiée avec $K > 0$, on a déjà remarqué que nécessairement $(0,0,0,0)$ est la seule solution constante de $(*)$. Et, en effet, on peut vérifier que les cœfficients des parties 2 et 3 vérifient la condition de la question 1-1.

On peut remarquer que le cas particulier de la partie 2 entre dans le cadre de la partie 3, puisque les contraintes de la partie 3 sur a_1, a_2 et c sont vérifiées par $a_1 = a_2 = 2, c = -3/2$. Par contre, le calcul général et les multiples majorations de cette partie 3 rendent difficile l'estimation de la constante K associée, et l'on peut imaginer qu'appliqués au cas de la partie 2 où $a_1 = a_2 = 2, c = -3/2$ ils ne permettent pas d'obtenir le taux optimal $K = 2$ obtenu en 2-6 - 2-7.

La partie 4 permet de montrer $(**)$ avec une constante réelle K sous certaines conditions écrites sur n_+, n_-, qui à leur tour s'expriment explicitement en fonction de a_1, a_2 et c. La constante K obtenue s'exprime simplement en fonction de n_+ et n_-, contrairement à la partie 3. Cette constante K est positive strictement si $n_+, n_- \neq -1$ et $n_+ < 0$, comme on le voit en considérant les deux cas de la question 4-7. Appliquées à l'exemple $a_1 = a_2 = 2, c = -3/2$ de la partie 2, les questions 4-4 puis 4-7 assurent que $n_+ = -2$ et donc une constante $K = 2$, retrouvant ainsi le taux optimal obtenu en 2-6 - 2-7. Plus généralement on peut vérifier que les hypothèses de la partie 3 impliquent que nécessairement $n_+ < 0$, mais pas nécessairement que $n_+, n_- \neq -1$: ainsi ne permettent-elles pas toujours d'appliquer directement la question 4.7.