Banque MP inter-ENS – Session 2017
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS de Paris-Saclay, ENS de Lyon, ENS de Paris et ENS de Rennes.

- **Coefficients (en % du total concours) :**
  — Paris-Saclay MPI 9,6 % ; Info 13,2 %
  — Lyon : MPI 10,8 % ; Info/M 12,7 %
  — Paris : MPI/MP 3,7 % ; Info 13,3 %
  — Rennes : MPI 9,6 % ; Info 11,4 %

- **Membres du jury :**
  Roland Diel, Ludovic Goudenège, Yohann Le Floch, Christophe Poquet et Camille Tardif.

L'épreuve de mathématiques C 2017 avait pour thème l'équirépartition modulo 1 des suites de nombres réels : ses différentes caractérisations, ses conséquences et le théorème de Weyl sur l'équirépartition de suites définies comme valeurs aux entiers de polynômes à coefficient dominant irrationnel. Ce sujet a permis de tester les candidates et les candidats sur leur aisance à manipuler les techniques et les outils classiques d'analyse au programme des classes préparatoires aux grandes écoles.

Les notes se sont étalées de 0 à 20 avec une moyenne de 9,5 et un écart-type de 3,5.

De manière générale, le jury a récompensé la précision et la concision des rédactions ainsi que l'honnêteté des candidates et des candidats. A l'inverse, les candidates et les candidats ayant cherché à imposer leurs résultats à l'aide d'affirmations arbitraires ou d'arguments imprécis, ont été sanctionnés. En particulier, le jury regrette la désinvolture avec laquelle de trop nombreux candidats manipulent les limites. Elles apparaissent souvent sans aucune justification d'existence au préalable et les interversions de limites sont fréquemment effectuées sans explication ou en utilisant des arguments erronés.

Sans prétendre traiter l'intégralité du sujet, on attend tout de même des candidates et des candidats qu'ils abordent un certain nombre de questions « substantielles » pour obtenir une bonne note. Les candidates et les candidats ne doivent pas hésiter à lire tout le sujet en début d'épreuve, afin d'en avoir une bonne vision d'ensemble.

Il est rappelé aux candidates et aux candidats que la présentation entre pour une part importante dans l'appréciation d'une copie. En particulier, les abréviations sont à proscrire et les résultats obtenus doivent être mis en évidence. De même, les candidates et les candidats ne doivent pas hésiter à décrire les étapes de leurs raisonnements à l'aide de phrases, sans toutefois alourdir excessivement la rédaction. Il est également dans leur intérêt de bien faire apparaître les différentes étapes de leurs calculs et leurs justifications ; le jury ne devrait pas avoir à jouer aux devinettes pour exhiber les arguments non explicités.

Le jury précise que le sujet est rédigé de telle sorte que toutes les questions puissent être traitées à l'aide des outils du programme, et il attend des candidates et des candidats qu'ils n'utilisent pas de résultats hors programme sans démonstration. Les arguments basés sur un résultat hors programme non justifié n'ont pas été considérés comme valables.

Partie I

La première partie du sujet était destinée à mettre en place des résultats utiles pour le reste de l'épreuve. Elle a permis de tester les candidats sur leur maîtrise des techniques usuelles d'analyse et leur capacité à rédiger des démonstrations claires et concises de résultats classiques. Rappelons que les premières questions d'un sujet sont aussi l'occasion d'établir une relation de confiance entre le candidat et le correcteur, et que le premier cité n'a rien à gagner à bâcler la rédaction de celles-ci.

La première question demandait de vérifier que la périodisée d'une fonction continue est non seulement périodique, mais aussi continue, ce qu'un certain nombre de candidates et de candidats n'a pas compris ; le jury déplore également que des candidates et des candidats–fort heureusement en nombre assez faible–affirment que la partie entière est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. La deuxième question nécessitait d'appliquer le théorème de Heine sur un segment de longueur plus grande qu'une période, et d'utiliser un module d'uniforme continuité adapté ; une rédaction soigneuse et précise était attendue, et les rédactions lapidaires invoquant le théorème de Heine et la périodicité sans écrire de quantificateurs ont été sanctionnées. De même, les candidates et les candidats ayant reconnu le lemme de Cesàro dans la question suivante, sans proposer de démonstration, n'ont pas obtenu de point. La démonstration de ce résultat à l'aide d'un découpage de la somme est classique et la question a été bien traitée dans l'ensemble ; les rédactions à base de théorèmes de comparaison entre sommes partielles étaient également possibles, mais les candidates et les candidats s'y risquant devaient faire attention à bien vérifier les hypothèses de ceux-ci.

Partie II

La deuxième partie proposait une démonstration du théorème de Fejér ; elle a été traitée, avec plus ou moins de succès, par la plupart des candidates et des candidats. Les questions de cette partie qui demandaient d'obtenir des estimations uniformes ((4.a) et 4.b)) ont été particulièrement discriminantes, beaucoup de candidates et de candidats ne comprenant pas ce qui leur était demandé, ou faisant preuve de négligence dans leur rédaction.

La première question consistait en une simple vérification, mais le jury a apprécié les copies dans lesquelles la linéarité de l'intégrale était évoquée et les interversions somme-intégrale justifiées. La deuxième question a permis de tester les capacités de calcul des candidates et des candidats ; le jury a été agréablement surpris par la diversité des rédactions valables proposées dans les copies (rappelons cependant que l'utilisation de la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique nécessite une justification). A contrario, les tentatives de bluff manifestes ont été lourdement sanctionnées ; il est dans l'intérêt du candidat de soigner les différentes étapes de calcul et de bien mettre en évidence les arguments utilisés pour passer d'une égalité à la suivante. La question 3.a) ne présentait aucune difficulté et a été réussie dans la quasi-intégralité des copies. En revanche, la question 3.b) nécessitait du soin dans le changement de variables et la justification de la périodicité de l'intégrande pour se ramener à l'intégrale sur $[0, 1]$; une rédaction complète était attendue, les réponses se contentant d'affirmer que le résultat suivait d'un changement de variables et de la périodicité n'étant pas acceptables. Comme évoqué plus haut, les questions 4.a) et 4.b) ont été très discriminantes et ont permis aux candidates et aux candidats maîtrisant la notion d'estimation uniforme de se mettre en valeur. Concernant la première, le δ recherché ne devait bien évidemment pas dépendre de N ou de x. Il suffisait d'utiliser l'uniforme continuité de f, mais il était indispensable de signaler la positivité de K_N ; enfin, un argument supplémentaire utilisant la périodicité était attendu pour la majoration de la seconde intégrale. Encore une fois, dans la question suivante, les réponses aboutissant à une constante dépendant de N ou de x n'étaient pas valables, de même que celles contenant des majorations farfelues de K_N. Une justification de la minoration de $y \mapsto \sin^2(\pi y)$, ou de la finitude de l'intégrale de l'inverse de cette fonction, sur le segment $[\delta, 1-\delta]$, était attendue. La question suivante, qui consistait en une synthèse des résultats des deux précédentes, a été abordée par la plupart des candidates et des candidats, qu'ils aient traité ces dernières ou non ; le jury a été très sévère sur la rédaction, qui se devait d'être impeccable. Pour la question 5.a), le jury a accepté l'affirmation que la récurrence était immédiate, à condition de voir apparaître une intégration par parties correctement justifiée, notamment en ce qui concerne l'annulation des termes de bord ; par contre, il est regrettable que beaucoup de candidates et de candidats ne se soient pas posé la question de la division par k, alors que cet entier pouvait très bien être nul. La question 5.b) requérait du soin, et la meilleure rédaction consistait à découper la somme en trois parties : une somme sur les entiers strictement négatifs, une sur les entiers strictement positifs et le terme d'indice zéro. La comparaison avec la somme des $1/k^2$ n'était recevable qu'une fois une majoration uniforme des $c_k(f'')$ établie. Enfin, la question 5.c) était la plus délicate de cette partie ; il s'agissait d'obtenir la convergence normale, donc uniforme, à l'aide de la question précédente, et d'identifier la limite simple à l'aide de la question I.3). Le recours à cette dernière ne pouvait s'effectuer qu'en considérant la suite $S_n(f)(x)$ pour un réel x fixé, le lemme de Cesàro n'ayant été prouvé que pour des suites numériques. Enfin, rappelons que parler de la convergence d'une suite de fonctions sans préciser le mode de convergence n'a pas de sens.

Partie III

La troisième partie introduisait la notion d'équirépartition des suites réelles. Cette partie a été abordée au moins partiellement par la plupart des candidates et des candidats. Néanmoins, elle contenait des questions plus complexes que les précédentes qui ont permis aux meilleurs candidates et candidats de se démarquer.

La première question pouvait être résolue en encadrant les segments fermés par des semi-ouverts et réciproquement, néanmoins les passages à la limite sans justification (en particulier l'utilisation de limites de suites sans avoir justifié au préalable leur existence) ont été sanctionnés dans la notation. La question 2.a), où l'on montrait que les fonctions continues périodiques pouvaient être approchées uniformément sur $\mathbb{R}$ par des fonctions constantes par morceaux, a été bien réussie par de nombreux candidates et candidats. Par contre la question 2.b) a donné lieu trop souvent à des raisonnements confus voire faux : si la plupart des étudiants ont vu qu'il fallait utiliser les fonctions ϕ_M introduites à la question précédente, les passages à la limite en N (le nombre d'éléments considérés de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et en M (l'indice de la fonction ϕ_M) ont souvent été l'objet de rédactions peu soignées, voire effectuées sans aucune explication. Par ailleurs, le théorème d'interversion des limites au programme de classe préparatoire ne s'appliquait pas directement dans le cas présent. Dans la question 3, un dessin clair, correctement annoté était suffisant pour la partie a) ; pour la partie b), le passage à la limite a encore une fois trop souvent été effectué sans justification. La question 4 a été principalement traitée dans les bonnes copies ; remarquons toutefois que même dans celles-ci, les candidates et candidats ont souvent voulu utiliser la convergence uniforme de $S_n(f)$ vers f au lieu de celle de $\sigma_N(f)$, alors que les hypothèses de régularité sur la fonction f étaient insuffisantes. La question 5, plus facile, a souvent été bien traitée ; le jury souhaitait néanmoins que les candidates et candidats mentionnent l'importance du choix d'un α rationnel pour pouvoir utiliser le critère d'équirépartition démontré à la question précédente. Finalement, la question 6 n'a été traitée correctement que dans quelques très bonnes copies. Plusieurs rédactions étaient possibles : on pouvait se ramener à des polynômes trigonométriques en utilisant le noyau de Fejér ou bien, plus directement, utiliser l'uniforme continuité pour passer de la convergence simple à la convergence uniforme. Là encore les correcteurs attendaient une utilisation particulièrement soigneuse des quantificateurs. Rappelons que, contrairement à ce que le jury a pu parfois lire, la convergence simple pour tout réel n'implique pas la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Partie IV

Cette partie proposait une démonstration du théorème de Weyl : pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \geq 1$ dont le coefficient dominant est irrationnel, la suite $(P(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie. Elle a été peu abordée par les candidates et les candidats.

Le but de la question 1 était de démontrer l'inégalité de van der Corput énoncée en 1.d). Cette démonstration, technique, découpée en plusieurs sous-questions, n'a presque jamais été effectuée correctement dans son intégralité. Néanmoins, les candidates et les candidats ayant répondu correctement à la question 1.a) et/ou ayant donné des éléments de réponse intéressants à la question 1.c), la plus difficile, ont été récompensés. Par contre, ceux qui se sont contentés de répondre aux questions plus simples 1.b) et 1.d), qui ne nécessitaient respectivement qu'une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la sous-additivité de la racine carré, n'ont obtenu que très peu de points, voire aucun si ces deux éléments centraux n'étaient pas mentionnés explicitement. Dans la question 2, il fallait d'abord fixer H pour pouvoir utiliser l'équirépartition et non faire dépendre H de N. La question 3 n'a été traitée que dans les bonnes copies, souvent correctement.

Partie V

Cette dernière partie étudiait les liens entre équirépartition et nombres de Liouville. Plus classique que la partie précédente, du moins pour les questions 1 et 2, cette partie a été plus souvent traitée. Si cette stratégie était tout à fait défendable, le jury demandait néanmoins une rédaction irréprochable. Ainsi fallait-il, dans la question 1, justifier le fait que q_n^n diverge vers l'infini, et conclure proprement en se ramenant à des suites d'entiers ; le jury déplore d'avoir rencontré dans certaines copies l'affirmation selon laquelle tout suite convergente de rationnels est stationnaire. De même, dans la question 2.a), on attendait une minoration précise de $P(p/q)$, le seul fait que cette quantité ne s'annule pas ne suffisant pas à conclure. Enfin, dans la question 2.b), il fallait bien faire attention à ne pas oublier le cas rationnel. La question 3, beaucoup moins classique, n'a été traitée par quasiment aucun candidat.

⋆ ⋆
⋆