# Banque MP inter-ENS
# Rapport sur sur l'oral de Mathématiques

Oral commun ENS Paris-Saclay - ENS de Lyon - ENS (Paris) - ENS de Rennes

Session 2017

**Coefficients (en % du total d'admission) :**
— Paris-Saclay MPI 15,4 % ; Info 13,2 %
— Lyon : MPI 10,8 % ; Info/M 12,7 %
— Paris : MPI/MP 13,9 % ; Info 13,3 %
— Rennes : MPI 15,4 % ;

Le jury de cette épreuve était constitué de Adrien Deloro, Bénédicte Haas, Ayman Moussa et Guillaume Poly. 456 candidats ont passé l'épreuve.

## 1 Déroulement des épreuves

1. Chaque candidat était interrogé au tableau par l'un des examinateurs, sans temps de préparation. La durée officielle d'une interrogation étant de 45 minutes, le tiers-temps ouvrait le droit à un quart d'heure supplémentaire.
2. La question posée et après dix premières minutes sans interagir aucunement, l'examinateur commençait — si nécessaire — à assister le candidat.
3. Cette phase de résolution supervisée occupait la plupart de la planche ; on retiendra déjà qu'une résolution supervisée n'est pas une résolution guidée.
4. En cas d'achèvement, un deuxième exercice a pu être proposé. C'était toujours bon signe. Inversement, l'abandon complet par le jury d'un exercice est resté rarissime et réservé aux très mauvaises performances.
5. Il arrivait aux examinateurs de conclure par une question de cours.

Détaillons les points ci-dessus.

### 1.1 Formulation de l'exercice

Le jury pouvait avoir deux attitudes : pour un énoncé long, l'avoir préalablement inscrit au tableau ; ou le dicter au candidat. Dans ce second cas l'évaluation commençait dès alors, et pour plusieurs raisons.

- Manifester une certaine indépendance de notations n'est pas une mauvaise chose ; le risque étant néanmoins de renommer à la volée la moitié seulement de l'énoncé. Les candidats par exemple ayant décidé que la solution de l'équation différentielle s'appelait

$y(x)$ au lieu de $x(t)$ ont perdu pied dès l'introduction d'un polynôme $P(X)$, la notation de l'examinateur étant pourtant supposée les aider.

– Le candidat qui omet de transcrire certaines des hypothèses (malgré la répétition pressante) court toujours le risque de les oublier par la suite. Au demeurant ne pas daigner noter qu'une fonction est continue donne l'impression de tenir pour acquis qu'elles le sont toutes.
– La dextérité dans l'emploi de l'appareil de notations est inégalement partagée. Or la maturité technique est mesurable aussi d'après le recul face au langage mathématique. Ainsi l'un des postulants a de bonne foi noté $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble des endomorphismes d'un groupe $G$ : la double terminologie en algèbre linéaire l'ayant induit en erreur.

## 1.2 Les dix premières minutes

Le jury s'astreignait à dix minutes de mutisme et même d'impassibilité, n'engageant ni ne laissant s'engager d'emblée le dialogue. Ce premier temps a toujours fourni des indications précieuses non seulement sur l'autonomie du candidat mais aussi sur son pouvoir d'intuition. Et malgré l'apparente hostilité du procédé (déplaisant autant pour l'examinateur que pour le postulant), il n'a pas semblé déstabiliser de candidat.

Il est en effet intéressant de voir comment part le candidat face à un problème qu'on suppose entièrement nouveau pour lui. La résolution directe d'un exercice de type É.N.S. n'est pas nécessaire à l'obtention d'une note correcte ; seule la planche excellente se passe ainsi ; nous y reviendrons. Lors à défaut d'une épiphanie soudaine, on attend du candidat de la méthode, de l'autonomie, et un certain dynamisme.

**Méthode.** L'assimilation d'un problème se fait souvent par commentaire et simplification, de manière lucide et posée.

Un but essentiel de l'oral est de juger de la capacité du candidat à analyser un problème. Comprendre où se situe la difficulté, faire des parallèles avec d'autres problèmes déjà connus, discuter du problème dans des cas particuliers pertinents est très apprécié. À ce titre, prendre quelques minutes pour étudier l'énoncé sans se lancer tambour battant dans des calculs ou un raisonnement formaté peut être une bonne option. Un énoncé contenant un entier naturel ne s'établit pas toujours par récurrence ; l'introduction d'une base ne simplifie que rarement un problème d'algèbre linéaire ; on ne dérive pas tête baissée une fonction seulement supposée continue.

Faire des dessins, même dans des cas particuliers, même de façon simpliste, est souvent inspirant. Il est frappant de constater que nombre de candidats sont immédiatement débloqués quand l'examinateur leur suggère de faire un dessin. Ce devrait pourtant être une initiative naturelle.

Le jury voudrait insister sur la vanité d'une foi trop littérale en cette méthodologie de bon sens. Paraphraser l'énoncé, en se contentant de rappeler les définitions ; le simplifier à outrance pour n'aborder qu'un cas manifestement trivial ; esquisser des petits dessins sérigraphiés sans lien avec le problème, sont des « trucs » qui ne feront pas longtemps illusion. Il est aisé de paraître profond et de présenter les caractères extérieurs d'une méthodologie supérieure pendant deux minutes : or dix minutes sont assez pour que tel numéro tourne à vide.

**Autonomie.** Le jury attend des candidats un certain sens de l'initiative. Rester muet parce qu'on n'a pas la solution totale de l'exercice dénote un certain manque de maturité scientifique. De même proposer de nombreuses pistes différentes afin que le jury en choisisse une, montre un défaut d'autonomie.

Rappelons que le niveau des oraux d'É.N.S. étant élevé, les exercices nécessitent en général un raisonnement long et progressif. Le jury en a pleinement conscience et attend du candidat qu'il lui montre son *aptitude à raisonner*, même si ce raisonnement est incomplet.

**Dynamisme.** Les examinateurs ont été surpris de l'attitude passive de certains candidats, qui semblent attendre qu'on leur dise quoi faire. Ne montrer aucune motivation dans son attitude fait bien sûr mauvaise impression.

De même l'emploi d'un ton interrogatif dans l'espoir de déceler chez l'examinateur une confirmation ou une infirmation est à proscrire. Le jury attend *des affirmations*, modestes et révocables mais posées ; des affirmations auxquelles le candidat lui-même croit suffisamment pour désirer les établir.

Or le jury a constaté que de nombreux candidats rechignent à écrire leur début de preuve au tableau, préférant discourir et discuter le problème en un assaut d'éloquence parfois intéressant mais souvent inefficace. Pareil excès de rhétorique ne peut que nuire. Il est louable d'expliquer sa stratégie, mais il importe aussi d'écrire progressivement sa solution, de poser nettement les choses, d'établir fermement les étapes du raisonnement : il importe de savoir canaliser son dynamisme, et de le parer de rigueur.

## 1.3 Corps de la planche

Un mauvais début d'oral ne disqualifie nullement, la prestation étant jugée sur toute la durée de l'épreuve. Le candidat est donc invité à montrer persévérance et adaptabilité, qualités indispensables au métier de chercheur auquel forment les É.N.S.

Tout ce que nous avons dit des dix premières minutes reste vrai du corps de la planche, où le dialogue est engagé. Celui-ci n'est ni la marque d'un échec, ni une planche de salut où l'examinateur « débloque » le problème pour le candidat : *le dialogue est une autre part de l'évaluation*, où l'on mesure également sa réactivité, sa capacité à remettre en doute une stratégie ; et plus généralement, les germes de sa future habileté au débat scientifique. Cela étant mené sans pour autant brader l'exigence de rigueur.

**Réactivité.** L'aptitude du candidat à juger qu'une piste est mauvaise et à se relancer sur une autre voie contribue à améliorer la note.

Idem, admettre au cours d'un long raisonnement que l'on n'a pas tout à fait saisi une étape est un signe d'honnêteté scientifique appréciable et qui profite généralement au candidat pour mener à bien son oral : la découverte en fin de planche d'une incompréhension profonde (soigneusement camouflée) de l'exercice étant l'une des pires situations possibles.

**Rigueur.** Le dialogue n'est pas une simple discussion qualitative.

Entretenir un certain flou est la meilleure façon de commettre des erreurs et de ne pas convaincre l'examinateur. Au contraire, une argumentation claire, progressive, avec un effort de rédaction est fortement valorisée.

Le jury a d'ailleurs toujours exigé tôt ou tard un moment de technicité pure — les explications moins drapées de la rigueur la plus stricte, n'étant consenties qu'au candidat ayant déjà montré sa valeur technique.

Rappelons enfin que la résolution complète ne joue pour ainsi dire qu'à la marge, et permet de distinguer les bons candidats des très bons, la note de 15 étant parfaitement accessible sur un exercice incomplètement traité.

La perception qu'a le candidat de sa prestation est d'ailleurs souvent fausse ; la notation tient naturellement compte de l'inégale difficulté des exercices posés lors de la session d'oraux. Cette dernière remarque doit encore inciter le candidat à rester jusqu'au bout concentré et motivé.

Avouons enfin qu'une erreur s'était glissée dans l'un de nos énoncés. Si pareille situation est toujours possible, nous en tenons compte dans la notation de sorte qu'un candidat ayant planché sur un énoncé faux n'est jamais désavantagé. Un candidat qui décèle le problème est en revanche récompensé.

### 1.4 Sur le cours

Le jury attend une connaissance et une compréhension impeccable du cours ; ainsi qu'une vision claire des articulations entre ses différentes parties. On attend du recul. *Le candidat qui se contente d'apprendre des théorèmes en vue de les appliquer n'a tout simplement pas le profil cherché.*

Mais encore faut-il les apprendre, et la mention, par un candidat, du théorème de Heine pour les fonctions continues sur des ensembles connexes par arcs fait encore jaser (que se serait-il passé sur un ensemble seulement connexe ? les examinateurs sont perplexes). Il nous paraît superflu d'insister sur ce point : le cours doit être su.

À l'inverse, la mention de connaissances hors-programme pertinentes a pu être appréciée de l'examinateur, si elle apportait quelque chose à la discussion et qu'elle était faite avec les précautions nécessaires. Un candidat par exemple a dû contourner l'emploi de la mesure de Lebesgue dont il voyait bien qu'elle eût simplifié le problème ; un autre a cherché un argument élémentaire pour faire l'économie du théorème des nombres premiers qui dirigeait son intuition.

Mais une vaste érudition, ou même la manifestation d'un intérêt quelconque pour les mathématiques n'est pas exigible. Et d'ailleurs le jury n'était pas prêt à entendre un candidat invoquer un résultat qu'il n'eût su démontrer ; il doit reconnaître que le cas de figure était rare, et qu'une grande culture mathématique dûment maîtrisée semble être l'apanage des meilleurs candidats. On a néanmoins rencontré un ou deux aspirants — peut-être sur-préparés — maquillés de cuistrerie ; la stratégie n'est pas payante, pareille attitude ne disposant guère à la clémence. Le jury peut survivre en milieu hors-programme plus longtemps que le préparationnaire le plus flamboyant ou le mieux entraîné.

## 2 Difficultés spécifiques

Le jury a pris connaissance, avec étonnement parfois, des lacunes sur des points de cours aussi variés que fondamentaux chez de nombreux candidats. Certains postulants ignoraient par exemple :

- la caractérisation de la continuité pour une application linéaire par son caractère borné sur la boule unité ;
- l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les probabilités (exemple-type de point où un peu de recul sur le programme serait bienvenu) ;

- l'énoncé exact du Théorème de Rolle (non, la fonction ne doit pas être $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle !) ;
- la discussion qualitative du comportement d'une solution d'équation différentielle (qu'on eût préférée à une tentative de résolution par développement en série entière)
- le calcul différentiel dans sa quasi-totalité ; exprimer la différentielle d'une composée d'applications ou faire le lien avec la dérivée en dimension 1 ne devrait pas conduire aux obscénités auxquelles le jury a dû faire face ;
- certains rudiments même d'algèbre linéaire, une question aussi redoutablement naïve que « si deux matrices carrées $A$ et $B$ vérifient $AB = I_n$, a-t-on $BA = I_n$ ? » ayant été étonnamment filtrante.

Enfin le jury a été frappé de la débâcle causée par certains énoncés réputés classiques : il semblerait exigible d'un candidat à une É.N.S. de parfaitement savoir identifier les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même et de reconnaître les avatars de cette description pour d'autres structures (*via* l'application d'un logarithme par exemple).

Inversement, le jury a été favorablement surpris par la maîtrise globale de questions relatives à la non-dénombrabilité, malgré leur absence littérale du programme.

# 3 Exemples d'exercices et commentaires

**Exercice.** Soit $A$ une partie de $[0,1]$ et $F$ un sous-espace de $\mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R}^d)$.

1. On suppose que $A$ est fini. Donner une CNS sur $F$ pour que dans cet espace la convergence simple sur $A$ vers 0 soit équivalente à la convergence uniforme sur $[0,1]$ vers 0.
2. Reprendre la question précédente en supposant $A$ dénombrable.

**Commentaire.** L'énoncé mentionne une propriété valide dans l'espace $F$ : on ne peut *a priori* rien dire d'une suite d'éléments de $F$ qui convergerait simplement sur $A$ vers une fonction continue $f$ dont on n'a pas vérifié qu'elle appartenait à l'espace en question, quand bien même $f$ serait constante. Sur cet exercice (et d'autres), plusieurs candidats ont "flairé" un phénomène relevant du Théorème de Riesz sur la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de leur boule unité mais (devons-nous le préciser ?) :

- Ce théorème n'est pas au programme.
- Évoquer un résultat élaboré sans en maîtriser les aspects élémentaires est du plus mauvais effet.

Le jury a eu par exemple plusieurs fois l'occasion d'entendre qu'en dimension infinie la boule unité $\{x \in E \,:\, \|x\| \leq 1\}$ n'est pas fermée (ou bornée, au choix).

**Solution**. Bien qu'effectivement nécessaire, la finitude dimensionnelle de $F$ n'était pas la CNS attendue à la première question : le cas d'une suite constante $f_n = f \in F$ impose l'injectivité de

$$\begin{aligned} T : F &\longrightarrow \mathbb{R}^{dp} \\ f &\longmapsto (f(t_1),\ldots,f(t_p)). \end{aligned}$$

Réciproquement, l'injectivité de l'application précédente assure que $F$ est de dimension finie et que $f \mapsto \|f(t_1)\| + \cdots + \|f(t_p)\|$ est une norme sur $F$, laquelle est donc équivalente à la norme uniforme.

Le cas où $A$ est infini dénombrable ne peut pas se traiter de la même manière : l'injectivité de $T$ ne fournit pas la finitude dimensionnelle de $F$ et les normes ne sont donc pas équivalentes. En guise de contre-exemple on peut considérer $F = \mathrm{Vect}(x \mapsto \sin(\lambda x)\ :\ \lambda \in \mathbb{R})$, $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. L'injectivité de l'application $T$ est obtenue par continuité et la suite $(f_n)_n := (x \mapsto \sin(2\pi n! x))_n$ converge simplement vers 0 sur $A$, mais bien sûr pas uniformément sur $[0,1]$ puisque pour tout $n \geq 1$ on a $f_n(0.25/n!) = 1$.

Cela invite à considérer une condition plus forte : $T$ injective <u>et</u> $F$ de dimension finie. Vérifions que cette condition est suffisante. Notons $\Phi_t$ la forme linéaire d'évaluation associée à $t \in A$, et $r$ le rang de $\mathrm{Vect}(\Phi_t\ :\ t \in A)$, sous-espace de $F^\star$ qui est de dimension $q = \dim F < \infty$. On dispose ainsi de $t_1, \cdots, t_r \in A$ tels que $\mathrm{Vect}(\Phi_t\ :\ t \in A) = \mathrm{Vect}(\Phi_{t_1}, \cdots \Phi_{t_r})$. Puisque l'application $T$ est injective, il en est de même de $\Psi : f \mapsto (f(t_1), \cdots, f(t_r))$, laquelle va de $F$ dans $\mathbb{R}^r$ : on a donc nécessairement $r = q$. On est alors ramené à la question précédente en remplaçant simplement $A$ par $\{t_1, \cdots, t_q\}$.

Réciproquement, il nous reste à démontrer que si la convergence simple sur $A = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique la convergence uniforme sur $[0,1]$, alors $F$ est de dimension finie. Supposons donc que ce ne soit pas le cas. L'application $T : f \mapsto (f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'ensemble $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). On introduit le "projecteur"

$$\begin{aligned} \Pi_p : \ell^\infty(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{N}) \\ (u_n)_n &\longmapsto (u_0, u_1, \cdots, u_{p-1}, 0, 0, \cdots). \end{aligned}$$

Lorsque $p$ est fixé, l'application $\Pi_p \circ T$ ne peut pas être injective : cela voudrait dire que $F$ s'injecte linéairement dans $\mathbb{R}^{dp}$, et on a supposé $F$ de dimension infinie. On dispose donc d'une suite $(f_p)_p \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments non nuls telle que pour tout $p$, $\Pi_p(f_p) = 0$. Par ailleurs, puisque $f_p$ est non nul, il existe $s_p \in A$ tel que $f_p(s_p) \neq 0$ (injectivité de $T$, première condition nécessaire établie). Quitte à remplacer $f_p$ par $f_p/\|f(s_p)\|$, nous avons donc construit une suite $(f_p)_p$ d'éléments de $F$ et une suite $(s_p)_p$ d'éléments de $A$ telles que : $f_p(t_n) = 0$ si $0 \leq n \leq p$ et $\|f_p(s_p)\| = 1$. En particulier, $n$ étant fixé, la suite $(f_p(t_n))_p$ tend vers 0 (puisqu'elle est nulle pour $p \geq n$) : la suite $(f_p)_p$ converge donc simplement sur $A$ vers 0. Par hypothèse, cela équivaut à la convergence uniforme, ce qui voudrait donc dire que $(f_p(s_p))_p$ converge également vers 0, alors que cette suite est à valeurs dans la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. $\square$

**Exercice.** On rappelle que $G$ étant un groupe et $X \subseteq G$ un sous-ensemble quelconque, le *centralisateur* de $X$ dans $G$ est $C_G(X) = \{g \in G : \forall x \in X, xg = gx\}$. C'est un sous-groupe de $G$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $X \subseteq G$ un sous-ensemble quelconque. Montrer qu'il existe un sous-ensemble *fini* $X_0 \subseteq X$ tel que $C_G(X) = C_G(X_0)$.
2. Soit dorénavant $G \neq \{1\}$ un groupe dont tous les éléments $\neq 1$ sont conjugués, i.e. $\forall (x,y) \in (G \setminus \{1\})^2\ \exists g \in G\ gxg^{-1} = y$.
   Montrer que si un élément de $G$ est d'ordre fini $> 1$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Commentaire.** La première question incarne tout ce que le candidat moyen n'aime pas : un problème de théorie des groupes apparemment abstrait, mais qui se ramène à de l'algèbre linéaire. Or au moment où l'algèbre linéaire intervient, le candidat a déjà perdu pied. Pourquoi ? Parce qu'il y a là plusieurs structures concurrentes. Pareil énoncé paraît pertinent aux É.N.S. : d'aspect fort peu technologique, il demande une certaine maturité algébrique.

La deuxième partie requérait davantage d'ingéniosité et d'initiative ; le traitement infligé a fort déplu à son introducteur.

**Solution**.

1. Idées : déplacer la question à $M_n(\mathbb{K})$ + là c'est la « théorie de la dimension ».

   (Déplacer la question à l'algèbre $M_n(\mathbb{K})$.) Notons $M = M_n(\mathbb{K})$, qui est une $\mathbb{K}$-algèbre associative contenant $G$. Rappelons que si $Y \subseteq M$ est une partie quelconque, alors $C_M(Y) = \{m \in M : \forall y \in Y, my = ym\}$ est une sous-algèbre, et notamment un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel. En outre, si $Y \subseteq G$, alors $C_G(Y) = G \cap C_M(Y)$. En conclusion, il suffit de montrer qu'il existe $X_0 \subseteq X$ fini tel que $C_M(X) = C_M(X_0)$.

   (Engendrement fini d'un ev. de dim. finie) Or $V = \text{Vect}(X) \leq M$ est de dimension finie $\leq n^2$, et la partie génératrice $X$ contient une partie génératrice minimale $X_0 \subseteq X$ de $V$. Mais $X_0$ est une base de $V$, donc de cardinal fini.

2. Idées : conjuguer à l'inverse + le groupe est en fait d'exposant 2, donc abélien.

   (Tout élément $\neq 1$ est de même ordre premier.) Soit $g \in G$ distinct d'ordre disons $n > 1$ ; si $n$ n'est pas premier, alors décomposant $n = ab$ en deux facteurs propres, on voit que $g^a$ est d'ordre $b$. Mais il est conjugué à $g$, donc d'ordre $n$ : contradiction. Donc $n$ est premier.

   (Cet ordre est 2.) Or $g^{-1}$ aussi est conjugué à $g$ : donc il existe $x \in G$ tel que $xgx^{-1} = g^{-1}$. Notamment $x^2gx^{-2} = g$ et $x^2 \in C_G(g)$. Mais si $n \neq 2$, alors $x \in \langle x^2 \rangle \leq C_G(g)$, donc en fait $g^{-1} = xgx^{-1} = g$ et $n = 2$. Cette contradiction montre que $n = 2$.

   (Commutativité, classique.) Ainsi tout élément de $G$ vérifie $g^2 = 1$. Notamment si $g,h \in G$:

   $$hg = h^{-1}g^{-1} = (gh)^{-1} = gh$$

   donc $G$ est abélien. Mais tous ses éléments $\neq 1$ sont conjugués : d'où $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\square$

**Exercice.**

1. Soit $X$ une variable aléatoire positive telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < \infty$. Montrer que

   $$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_n \in ]0,1[$, on considère le modèle aléatoire suivant : pour chaque paire d'entiers $\{i,j\}, i \neq j$, $i,j \in \{1, \ldots, n\}$, les entiers $i$ et $j$ sont *liés* avec probabilité $p_n$ et ne sont pas *liés* avec probabilité $1 - p_n$, et ce de façon indépendante pour les $n(n-1)/2$ paires. Un entier $i$ est alors dit *isolé* s'il n'est lié à aucun entier $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$. On note $X_n$ le nombre d'entiers isolés parmi $\{1, \ldots, n\}$.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X_n > 0) \to 0$ quand $n \to \infty$ si $p_n \gg \ln n/n$.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_n > 0) \to 1$ quand $n \to \infty$ si $p_n \ll \ln n/n$.

**Commentaire.** Peu de candidats ont pensé à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la première question. Plus étonnant, certains ne savaient pas énoncer cette inégalité en termes de variables aléatoires. L'égalité $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A]$, pour $A$ un événement, n'est pas non plus connue de tous. La question 2 (a) a été assez bien traitée en général. La question 2 (b) a été abordée par très peu de candidats.

**Solution**.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

   $$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X > 0)},$$

qui donne bien
$$\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} \leq \mathbb{P}(X > 0).$$

2. L'entier $n$ étant fixé, on note $A_i^{(n)}$ l'événement "l'entier $i$ est isolé", $1 \leq i \leq n$. La propriété d'indépendance dans le processus de liaison implique que
$$\mathbb{P}(A_i^{(n)}) = (1-p_n)^{n-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}) = (1-p_n)^{2n-3} \quad \text{si } i \neq j.$$
Par ailleurs
$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i^{(n)}}. \tag{1}$$
Notons que cette variable aléatoire ne suit pas une loi binomiale, les événements $A_i^{(n)}, 1 \leq i \leq n$ n'étant pas indépendants.
   (a) Par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}[X_n] = n(1-p_n)^{n-1}$. Combiné à l'inégalité de Markov ceci nous amène à
   $$\mathbb{P}(X_n > 0) = \mathbb{P}(X_n \geq 1) \leq \mathbb{E}[X_n] = n(1-p_n)^{n-1}.$$
   Clairement, ce majorant tend vers 0 si $p_n \gg \ln n/n$ (utiliser $1 - x \leq e^{-x}, x \in \mathbb{R}$).
   (b) L'idée est d'utiliser l'inégalité établie en 1. Il reste alors à montrer que
   $$\frac{\mathbb{E}[X_n]^2}{\mathbb{E}[X_n^2]} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \quad \text{lorsque} \quad p_n \ll \frac{\ln n}{n}.$$
   En utilisant l'expression (1) et en développant le carré on obtient
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n^2] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i^{(n)}}] + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i^{(n)}} \mathbf{1}_{A_j^{(n)}}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^{(n)}) + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} \mathbb{P}(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}) \\ &= n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}.\end{aligned}$$
   Par suite,
   $$\frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{\mathbb{E}[X_n]^2} = \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} + \frac{n-1}{n}(1-p_n)^{-1}.$$
   Ce terme converge vers 1 si $p_n \ll \ln n/n$.

□

**Exercice.** Étant donné $d \in \mathbb{N}^\star$, on se donne une application $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ et on introduit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_d})$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On dit que $f$ est **harmonique** si et seulement si
$$\forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^d, f(\vec{n}) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{d} \Big( f(\vec{n} + \vec{e_i}) + f(\vec{n} - \vec{e_i}) \Big)$$
Le but de cet exercice est de prouver que si $f$ est à la fois **harmonique** et **bornée** alors $f$ est **constante**.

1. Démontrez l'assertion précédente dans le cas où $d = 1$.

2. On supposera désormais $d > 1$, on définit alors pour $\vec{h} \in \mathbb{Z}^d$:

$$\Delta_{\vec{h}} = \sup_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} f(\vec{h} + \vec{n}) - f(\vec{n}).$$

Démontrez que $\Delta_{\vec{h}} \geq 0$ pour tout $\vec{h} \in \mathbb{Z}^d$.

3. Démontrez que $\Delta_{\vec{e_1}} \leq 0$. $\big($On pourra considérer $\vec{n_\epsilon}$ tel que $\Delta_{\vec{e_1}} - \epsilon < f(\vec{e_1} + \vec{n_\epsilon}) - f(\vec{n_\epsilon}) \leq \Delta_{\vec{e_1}}$.$\big)$
4. Conclure.

**Commentaire.** Aucun candidat n'a terminé l'exercice. La question 1 a été relativement bien traitée et certains candidats ont proposé une solution alternative en montrant que $f(n+1) - f(n)$ est une suite constante. A noter que certains candidats ont eu du mal à répondre à des questions de cours simples sur les suites récurrentes linéaires et ont été lourdement sanctionnés. La question 2 a été dans l'ensemble bien résolue mais la question 3, qui concentrait la difficulté de l'exercice, n'a pas été menée au bout.

**Solution**.

1. En dimension un, l'harmonicité de $f$ se réduit à la relation:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \frac{1}{2}\Big(f(n+1) + f(n-1)\Big)$$

La relation précédente implique que la suite $(f(n))_{n \geq 0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 donnée par $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$. L'équation caractéristique associée est $x^2 - 2x + 1 = 0$ admet 1 comme racine double ce qui implique qu'il existe deux constantes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telles que $f(n) = an + b$ pour tout $n \geq 0$. Or $f$ est bornée donc nécessairement $a = 0$ et $f$ est constante égale à $b$ sur $\mathbb{N}$. En utilisant la relation d'harmonicité en 0, on montre que $f(-1) = b$ puis par une récurrence simple que $f$ est constante sur $\mathbb{Z}$.

2. Supposons qu'il existe $\vec{h} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\Delta_{\vec{h}} < 0$. Ceci implique que pour tout $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$, $f(\vec{n} + \vec{h}) - f(\vec{n}) \leq \Delta_{\vec{h}} < 0$. Par conséquent, en choisissant $\vec{n} = k\vec{h}$ et en sommant les inégalités obtenues, on obtient

$$f(n\vec{h}) - f(0) \leq n\Delta_{\vec{h}} \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty.$$

Cela contredit le fait que $f$ est bornée et par conséquent $\Delta_{\vec{h}} \geq 0$.

3. Remarquons qu'un tel $\vec{n_\epsilon}$ existe par définition de la borne supérieure. En utilisant la relation d'harmonicité en $\vec{n_\epsilon}$ et $\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1}$ ainsi que la définition de $\vec{n_\epsilon}$ on obtient

$$\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{d}\Big(f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1} + \vec{e_i}) + f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1} - \vec{e_i})\Big) > (\Delta_{\vec{e_1}} - \epsilon) + \frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{d}\Big(f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_i}) + f(\vec{n_\epsilon} - \vec{e_i})\Big).$$

Autrement dit, par soustraction (le $2\Delta_\epsilon$ vient du fait qu'on a $\frac{1}{2d}$ devant la somme) on récupère:

$$\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{d}\Big\{\Big(f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1} + \vec{e_i}) + f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1} - \vec{e_i})\Big) - \Big(f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_i}) + f(\vec{n_\epsilon} - \vec{e_i})\Big) - 2\Delta_{\vec{e_1}}\Big\} > -\epsilon$$

D'autre part, $\forall i \in \{1, \cdots, d\}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1} + \vec{e_i}) - f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_i}) &\leq \Delta_{\vec{e_1}} \\ f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1} - \vec{e_i}) - f(\vec{n_\epsilon} - \vec{e_i}) &\leq \Delta_{\vec{e_1}}. \end{aligned}$$

En posant $\alpha_i = f(\vec{n_\epsilon}+\vec{e_1}+\vec{e_i}) - f(\vec{n_\epsilon}+\vec{e_i}) - \Delta_{\vec{e_1}}$ et $\beta_i = f(\vec{n_\epsilon}+\vec{e_1}-\vec{e_i}) - f(\vec{n_\epsilon}-\vec{e_i}) - \Delta_{\vec{e_1}}$ qui sont négatifs par ce qui précède on peut écrire successivement que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{d} \alpha_i + \beta_i > -\epsilon \\ &\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{d} -\alpha_i - \beta_i < \epsilon \\ &-\alpha_1 < 2d\epsilon \text{ (On utilise ici que } -\alpha_i, -\beta_i > 0) \end{aligned}$$

En particulier, il en découle $f(\vec{n_\epsilon} + 2\vec{e_1}) > (\Delta_{\vec{e_1}} - 2d\epsilon) + f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1})$. Par conséquent on a démontré que

$$f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1}) > (\Delta_{\vec{e_1}} - \epsilon) + f(\vec{n_\epsilon}) \Rightarrow f(\vec{n_\epsilon} + 2\vec{e_1}) > (\Delta_{\vec{e_1}} - 2d\epsilon) + f(\vec{n_\epsilon} + \vec{e_1}).$$

Donc on se retrouve dans la même situation avec $\epsilon$ remplacé par $2d\epsilon$ et $\vec{n_\epsilon}$ remplacé par $\vec{n_\epsilon}+\vec{e_1}$. En itérant le raisonnement précédent on obtient donc $f(\vec{n}+k\vec{e_1}) > \left(\Delta_{\vec{e_1}} - (2d)^{k-1}\epsilon\right) + f(\vec{n} + (k-1)\vec{e_1})$.

.

Ainsi, en sommant les inégalités obtenues on récupère

$$\sum_{k=1}^{p} \left(f(\vec{n_\epsilon} + k\vec{e_1}) - f(\vec{n_\epsilon} + (k-1)\vec{e_1})\right) = f(\vec{n_\epsilon} + k\vec{e_1}) - f(\vec{n_\epsilon}) > p\Delta_{\vec{e_1}} - \epsilon\left(\sum_{k=1}^{p}(2d)^{k-1}\right).$$

Ainsi, pour tout $p \geq 1$ et tout $\epsilon > 0$ on a $2\|f\|_\infty \geq p\Delta_{\vec{e_1}} - \epsilon\left(\sum_{k=1}^{p}(2d)^{k-1}\right)$ et nécessairement $2\|f\|_\infty \geq p\Delta_{\vec{e_1}}$ en faisant tendre $\epsilon$ vers 0. On fait alors tendre $p$ vers l'infini pour conclure.

4. En combinant les deux questions précédentes on récupère que $\Delta_{\vec{e_1}} = 0$ et plus généralement que $\Delta_{\vec{e_i}} = 0$. Par ailleurs, il est aussi clair que $-f$ est également harmonique et bornée donc les mêmes conclusions s'appliquent également à $-f$. Donc

$$\sup_{\vec{n_\epsilon}\in\mathbb{Z}^d} f(\vec{n} + \vec{e_i}) - f(\vec{n}) = \sup_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} f(\vec{n}) - f(\vec{n} + \vec{e_i}) = 0$$

pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$: on en déduit que $f(\vec{n} + \vec{e_i}) = f(\vec{n})$, pour tout $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$. Ainsi $f$ est constante.

$\square$