

Banque PC inter ENS - Session 2017

Rapport sur l'épreuve orale de Mathématiques (UL)

Écoles concernées : ENS de Lyon - ENS Ulm

Coefficients (en pourcentage du total d'admission) :

Ulm : 17,1% - Lyon : 7,0%

Membres du jury : Guillaume AUBRUN, Louis DUPAIGNE, Emmanuel GRENIER, Alexis TCHOUDJEM

1 Commentaires généraux

L'épreuve orale de mathématiques Ulm/Lyon s'est déroulée dans les locaux de l'ENS Lyon, entre le 21 juin et le 12 juillet 2017. Il s'agit d'une épreuve de 45 minutes, sans préparation.

Les interrogations ont été de forme variée. Parfois, une seule question, à l'énoncé très simple mais à la solution élaborée, suffit pour occuper le candidat pendant l'intégralité de l'épreuve. A l'inverse, certaines planches étaient formées d'une succession de questions plus élémentaires.

La discussion avec le candidat permet à l'examineur de s'assurer que le candidat a bien assimilé son cours, mais aussi d'évaluer sa capacité d'adaptation devant un problème avec lequel il n'est pas familier. Certains énoncés étaient volontairement rédigés de manière déroutante. Le jury a évité d'interroger les candidats sur les notions qui ne sont pas au programme de PCSI/PC.

Le jury a été particulièrement surpris par la grande hétérogénéité de niveau des candidats : plusieurs candidats excellents, à l'intuition mathématique remarquable, cotoient de nombreux élèves présentant des lacunes graves. Certaines parties du programme semblent moins bien assimilées. Voici par exemple une liste de faiblesses révélées chez plusieurs candidats

- En probabilités, certaines idées élémentaires comme la linéarité de l'espérance ne sont pas toujours parfaitement maîtrisées. Une erreur commune lorsqu'on travaille avec des variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n est d'écrire $\mathbf{E}[X_i X_j] = \mathbf{E}[X_i] \mathbf{E}[X_j]$ sans réaliser que la validité de cette formule suppose $i \neq j$.
- De nombreux candidats présentent des lacunes en calcul différentiel, et ne sont pas capables d'écrire correctement la différentiation d'une fonction composée.
- De manière plus surprenante, l'étude de fonctions abstraites de la variable réelle a posé quelquefois des problèmes. Par exemple, l'a question de démontrer que le maximum de deux fonctions continues est une fonction continue a rarement été traitée de manière satisfaisante.
- Plusieurs candidats restent pantois devant l'énoncé proposé et ne font preuve d'aucune initiative. Une telle passivité a été sanctionnée. Même sur un exercice difficile, il est toujours possible de prendre des initiatives : faire un dessin, s'intéresser à des cas particuliers. Par exemple, pour un exercice traitant de fonctions de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} , il est naturel de commencer par étudier le cas $n = 1$.

Néanmoins, le jury tient à préciser que le niveau d'ensemble du concours reste excellent, et a été impressionné par une poignée de candidats exceptionnels.

2 Quelques exercices posés

Exercice 1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne vers $\ell \in \mathbf{R}$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell$$

1. Montrer qu'une suite périodique converge en moyenne.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ayant la propriété suivante : pour toute suite (u_n) convergeant en moyenne vers ℓ , $(f(u_n))$ converge en moyenne vers $f(\ell)$.

Exercice 2

On définit une suite (u_n) par la relation $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n}$.

1. Quelle est la limite de (u_n) ?
2. Préciser le comportement asymptotique de (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3

1. Soit $y_0 \in \mathbf{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $y : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ solution de

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Ay \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe une fonction $R : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ solution de

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= AR \\ R(0) &= \text{Id} \end{aligned}$$

Montrer que $y(t) = R(t)y_0$.

2. Justifier qu'une telle fonction R existe.
3. On suppose maintenant que $A = A_1 + A_2$ et que $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont telles que $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Soit $T > 0$ et $y_1, y_2, y : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ les solutions respectives de

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= A_1 y_1, & y_1(0) &= y_0 \\ \frac{dy_2}{dt} &= A_2 y_2, & y_2(0) &= y_1(T) \end{aligned}$$

Montrer que $y(T) = y_2(T)$.

4. On ne suppose plus que A_1 et A_2 commutent. Montrer que lorsque $T \rightarrow 0$,

$$y_2(T) - y(T) = \mathcal{O}(T^2)$$