**ÉCOLE POLYTECHNIQUE** **CONCOURS D'ADMISSION 2017**

# Composition de Mathématiques B, Filière MP (X)

## Présentation du sujet

Cette année le sujet s'intéressait à certaines inégalités fonctionnelles relatives à une mesure de probabilité $m$ sur $\mathbf{R}$. En particulier, l'entropie d'une fonction $f$ continue de carré intégrable pour $m$ jouait un grand rôle. Cette entropie est donnée par la formule

$$\mathrm{Ent}_m(f) = \int_{\mathbf{R}} h(f(x)^2)m(x)dx - h\left(\int_{\mathbf{R}} f(x)^2 m(x)dx\right)$$

où $h$ est la fonction définie par $h(x) = x\ln(x)$ pour $x > 0$ et prolongée par continuité en 0.

La notion d'entropie est centrale dans la théorie de l'information qui est la base théorique des communications électroniques actuelles. Cette notion est due en grande partie à Claude Shannon et l'on parle souvent d'entropie de Shannon. Le centenaire de la naissance de Claude Shannon a été célébré en 2016.

Les préliminaires étaient consacrés à établir l'existence des objets considérés (variance et entropie) et à caractériser les fonctions d'entropie nulle qui sont exactement les fonctions constantes. Cette partie était proche du cours.

La première partie s'intéressait à l'opérateur différentiel $L$ qui à une fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ associe la fonction donnée par la formule

$$Lf(x) = 1/2f''(x) - xf'(x)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$. Cet opérateur, lié à la mesure gaussienne $\mu$, a une extension naturelle aux fonctions du couple de variables $(t, x)$ en dérivant seulement par rapport à la seconde variable. Cette partie permettait aux candidat(e)s de montrer leur maîtrise de l'intégration par parties et des théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe somme. Ceci afin de montrer la formule de moyennisation suivante (Question 5)

$$\int \Phi_f(t,x)\mu(x)dx = \int f(x)\mu(x)dx$$

où $\phi_f(t,x) = \int f(x\cos(t) + y\sin(t))\mu(y)dy$.

La seconde partie avait pour but de démontrer *l'inégalité logarithmique de Sobolev* suivante (Question 8), pour $f \in \mathcal{C}_b^2$,

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leq \int |f'(x)|^2\mu(x)dx.$$

Une telle inégalité n'est pas vraie pour toutes les mesures et on utilisait ici les particularités de la mesure gaussienne.

Dans la troisième partie, la mesure redevenait quelconque mais l'on faisait l'hypothèse qu'une inégalité de Sobolev logarithmique était vraie pour les fonctions de classe $\mathcal{C}_b^1$. On montrait alors (Question 10) que l'on pouvait en déduire *une inégalité de Poincaré* :

$$\mathrm{Var}_m(f) \leq \frac{C}{2}\int |f'(x)|^2\mu(x)dx.$$

Ensuite il s'agissait d'étudier la fonction $H$ donnée par la formule $H(\lambda) = \int e^{\lambda f(x)} m(x)dx$ qui est la *la transformée de Laplace généralisée* de $f$ par rapport à la mesure $m$, et en déduire un comportement de la mesure $m$ comparable à celui d'une mesure gaussienne à l'infini (Question 13).

Cette épreuve s'achevait par une démonstration du phénomène de *concentration gaussienne de la mesure* (Question 16).

Pour un traitement plus général de l'entropie et des inégalités de Sobolev logarithmique ainsi qu'une une mise en contexte, on pourra consulter l'ouvrage [1].

# Références


[1] Cécile ANÉ, Sébastien BLACHÈRE, Djalil CHAFAÏ, Pierre FOUGÈRES, Ivan GENTIL, Florent MALRIEU, Cyril ROBERTO et Grégory SCHEFFER : *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, volume 10 de *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 2000. Avec une préface de Dominique Bakry et Michel Ledoux.


## Conseils généraux pour les candidates et candidats

Commençons par remarquer que la bonne connaissance du cours fait une grande différence entre les candidats. La maîtrise de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de l'intégration par parties et des résultats de continuité et dérivation sous le signe intégrale ont permis de largement séparer les candidats simplement sur les préliminaires et la première partie.

Lorsque l'on utilise un résultat de cours, il est important de montrer que l'on en connaît précisément l'énoncé et de s'assurer que les hypothèses sont bien vérifiées. Il ne suffit pas d'évoquer un théorème pour traiter la question concernée.

Le programme contient des énoncés subtils qu'il faut connaître mais il faut aussi maîtriser les manipulations élémentaires des inégalités. Les inégalités faisant appel aux valeurs absolues ou à l'inégalité triangulaire donnent lieu à des inégalités fausses, les candidats ayant en tête uniquement les cas où les valeurs sont positives. De même, les inégalités de croissance ne se multiplient pas ! Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont bien croissantes sur $]0, +\infty[$ mais la fonction $x \mapsto h(x) = x\ln(x)$ ne l'est pas du tout !

Certaines questions demandent de montrer un énoncé ou une inégalité qui est fourni. Si l'énoncé est proche du cours ou qu'il a été traité en classe, il ne suffit pas de lui donner un nom pour le prouver. Il est important de connaître quels sont les énoncés au programme pour savoir s'il s'agit d'une question de cours ou pas et donc traiter la question en conséquence.

Lorsqu'il s'agit de montrer une égalité ou une inégalité, il ne suffit de partir d'un des membres, faire des manipulations triviales, sauter la difficulté (voire utiliser un énoncé faux) et retomber sur l'autre membre. Il est préférable d'être honnête qu'espérer extorquer des points. En cas de mauvaise foi évidente, les points ne sont pas attribués et le candidat perd la bienveillance du correcteur.

### Indications sur le barème et statistiques générales

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

| | | |
|---|---|---|
| $0 \leqslant N < 4$ | 188 | 12,52 % |
| $4 \leqslant N < 8$ | 618 | 41,17 % |
| $8 \leqslant N < 12$ | 440 | 29,31 % |
| $12 \leqslant N < 16$ | 187 | 12,46 % |
| $16 \leqslant N \leqslant 20$ | 68 | 4,53 % |
| Total | 1501 | 100 % |
| Nombre de candidats : 1501 | | |
| Note moyenne : 8,18 | | |
| Écart-type : 3,91 | | |

Les résultats de l'épreuve sont en accord avec les directives statistiques générales du concours, ce qui garantit l'influence respective des différentes épreuves.

| | |
|---|---|
| Nombre de copies : | 1916 |
| Note moyenne : | 8.00 |
| Écart-type : | 3.92 |
| Coefficient de variation : | 48.9% |

L'histogramme de répartition des notes est représenté sur la figure 1. L'histogramme cumule les candidats français et étrangers.

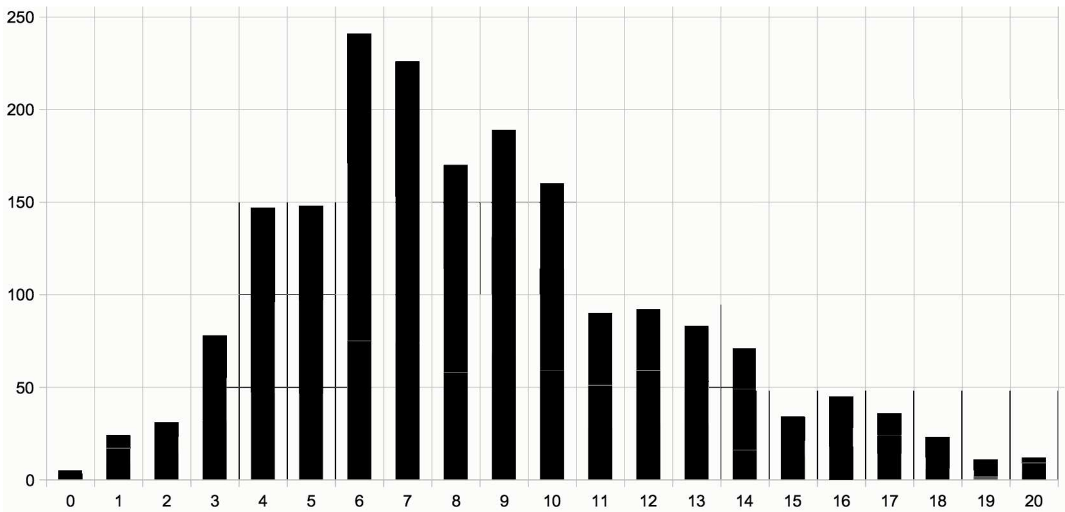


Fig.1 – En abscisse la note et en ordonnée le nombre de candidats ayant obtenu cette note.

Comme chaque année, le barème a été conçu selon trois objectifs : séparer les candidats dans la zone d'admissibilité, éviter les effets de seuil et minimiser les points de "grappillage".

Le tableau suivant indique la proportion de points attribués à chaque partie.

| | Proportion dans le barème | Barème cumulé | Note sur 20 cumulée |
|---|---|---|---|
| Préliminaires | 13% | 13% | 5.7 |
| Partie 1 | 19% | 32% | 12.5 |
| Partie 2 | 17% | 49% | 17.4 |
| Partie 3 | 32% | 81% | 20 |
| Partie 4 | 19% | 100% | 20 |

Nous avons décidé d'attribuer la note 18/20 à un étudiant ayant traité 52% du sujet et 20/20 à ceux ayant traité au moins 60% du sujet. Un candidat ayant uniquement traité parfaitement les préliminaires pouvait donc déjà obtenir 5.7/20. Les 674 candidats ayant obtenus moins de 6/20 n'étaient clairement pas assez préparés. A l'autre bout de l'échelle, les meilleures copies étaient assez rares cette année : seuls 27 candidats ont eu une note supérieure à 18/20. Le meilleur candidat a traité 82% du sujet, mais les deux suivants n'ont traité que 60%. Pour figurer parmi les 250 meilleurs candidats, il suffisait d'obtenir une note supérieure à 13/20 c'est-à-dire traiter correctement 33% du sujet.

Nous avons apprécié que les candidats soient mieux préparés à traiter des questions fondamentales d'analyse, en particulier toutes les justifications liées au calcul intégral. Cependant, la plupart des candidats restent fragiles en analyse : parmi les 250 meilleurs candidats, à peine 46% ont traité complètement les préliminaires. Il est troublant par exemple que ces mêmes candidats soient massivement arrêtés par un développement limité : seuls 15% des 250 meilleurs ont réussi la question 10b, alors que la plupart ont été plus loin dans le sujet.

Sur la figure 2, nous avons représenté le lien entre la note finale et un estimateur de qualité à savoir le nombre de points moyen obtenus par question (normalisé à 1 sur la valeur maximale). Plus l'indicateur de qualité est élevé et plus le candidat n'énonce que des vérités ; à l'inverse, un indicateur de qualité faible indique que l'étudiant aborde beaucoup de questions mais n'en traite aucune correctement. Les 400 candidats ayant obtenu une note supérieure à 11/20 traitent chaque question au moins à moitié. Un second groupe de 400 copies ayant un indicateur de qualité similaire est réparti entre les notes 5/20 et 11/20 ; les candidats dans ce groupe doivent revoir leurs méthodes de travail pour apprendre à conjuguer qualité et efficacité. Les 1080 copies ayant un indicateur de qualité inférieur à 0.5 n'ont simplement pas leur place au concours : un candidat ne peut pas espérer intégrer l'École Polytechnique si plus de la moitié de ses réponses sont entachées d'erreurs.

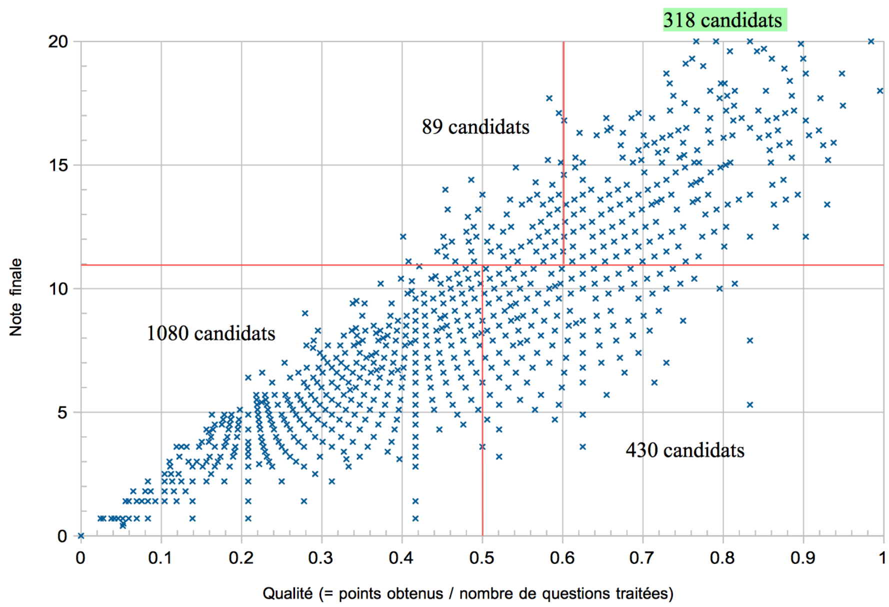


Fig.2 – Analyse du biais entre la note finale et un estimateur de la qualité du contenu.

La dernière statistique que nous présentons cette année concerne l'évolution du profil des candidats au cours des six dernières années. Pour chaque épreuve de Maths B, nous avons reporté la proportion du sujet traitée par les candidats ayant obtenu respectivement 7/20, 12/20 et 18/20. Il est choquant de constater qu'un candidat ayant traité 50% du sujet obtenait 12/20 en 2011 mais qu'il obtient 18/20 cette année. De façon similaire, la "cote" du 12/20 a baissée de 20 points puisqu'il suffit maintenant de traiter 30% du sujet pour obtenir cette note.

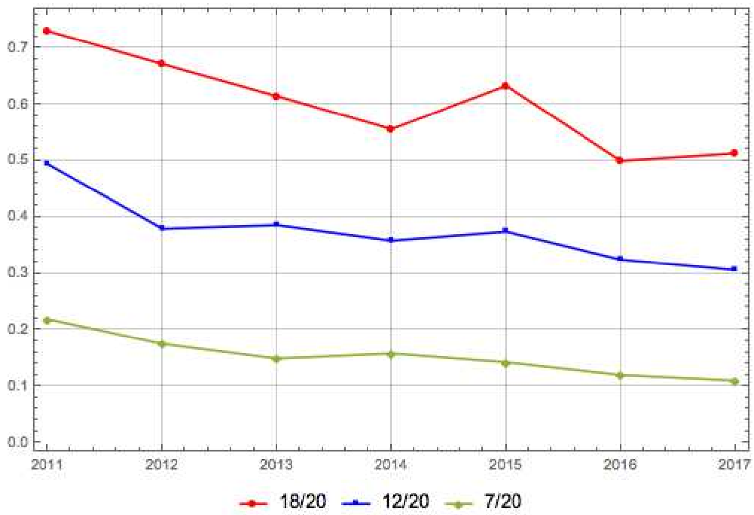


Fig.3 – Évolution de la fraction du sujet traitée par un candidat ayant une note donnée.

Bien entendu, on doit rester prudent dans la comparaison statistique entre des épreuves différentes. Cependant, comme la qualité des sujets et leur adéquation au programme sont restées au coeur des priorités du concours et que l'esprit des barèmes et les paramètres statistiques (moyenne, écart-type) sont aussi restés constants, on ne peut que constater la tendance suivante : *les candidats rencontrent une difficulté croissante à se préparer correctement à une épreuve d'analyse dans les 2 (ou 3) ans qui les séparent du Bac.* Les conséquences de cette observation dépassent largement le cadre de l'épreuve de Maths B et nous invitons nos collègues enseignants de l'École Polytechnique, enseignants des classes préparatoires et du lycée à y réfléchir.

## Examen détaillé des questions

Ce qui suit n'est pas un corrigé de l'épreuve mais des commentaires question par question.

### Préliminaires

**Question 1** Cette question pouvait se traiter, d'une pierre deux coups, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Rappelons que le Schwarz dont il est question n'est pas le mathématicien français Laurent Schwartz et que cela s'écrit sans t.

**Question 2a** L'intégrabilité sur un intervalle non-compact n'est pas une conséquence de la continuité et la simple connaissance d'une limite nulle en l'infini n'assure pas l'intégrabilité. De même, l'intégrabilité n'implique pas de limite nulle en $+\infty$ ni même d'être borné. Ces erreurs sur des conditions nécessaires ou suffisantes d'intégrabilité montre une mauvaise compréhension de la notion.
On pouvait majorer $f(x)^2$ par $h(f(x)^2)$ lorsque $f(x)^2 \geq e$ et par une constante lorsque $f(x)^2 \leq e$. La meilleure constante était 1 (une étude de la fonction $h$ permettait de le voir), ce qui menait à l'inégalité pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)^2 \leq 1 + h(f(x)^2)$ et à l'intégrabilité de $f^2m$.
Il faut faire attention aux fausses inégalités, par exemple $|h(f(x))|$ n'est pas majoré par $|h(\sup|f|)|$ car $|h|$ n'est pas croissante. Certains candidats confondent « $f$ n'est pas borné » et « $|f(x)| \to \infty$ quand $x \to \pm\infty$ ».

**Question 2b** Cette question visait à montrer une inégalité de convexité. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction $h$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on pouvait utiliser la caractérisation avec la positivité de $h''$. Attention, cette caractérisation ne s'appliquait pas en 0. En 0, un simple passage à la limite donnait une inégalité large mais pas stricte. Il fallait donner un argument supplémentaire pour obtenir une inégalité stricte.
Pour ceux qui ont souhaité utiliser une inégalité de Taylor, il ne fallait pas se tromper dans l'écriture du reste intégral. D'autre part, la formule de Taylor-Young est locale et ne permet pas de connaître

le signe sur un intervalle arbitraire.

**Question 2c** Pour être rigoureux, il fallait séparer le cas $a = 0$ et le cas $a \neq 0$ pour pouvoir appliquer la question précédente. Dans le cas $a \neq 0$, il suffisait de remplacer $x$ par $f^2(x)$ et d'intégrer par rapport à la mesure $m$.

**Question 2d** La continuité de la fonction $f$ donnait que l'entropie nulle implique égalité dans la question 2b avec $x$ remplacé par $f^2(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ce cas d'égalité implique que pour tout $x$, $f^2(x) = a$. D'où, pour tout $x$, $f(x) = \pm\sqrt{a}$ et il fallait utiliser de nouveau la continuité pour justifier que le signe est constant et donc que $f$ est constante.

## Partie I

**Question 3a** Il s'agissait d'un simple calcul de dérivée d'un produit à effectuer proprement.

**Question 3b** Pour justifier l'existence des deux membres, on pouvait montrer l'intégrabilité des différents membres (c'est-à-dire, l'existence de l'intégrale de la valeur absolue de l'intégrande). Mettons en avant que $Lh_2$ n'a aucune raison d'être bornée. Une intégration par parties donnait la formule désirée. On pouvait aussi utiliser cette intégration par parties pour justifier l'existence d'un troisième terme après avoir justifié l'existence des deux autres termes.
Cette intégration par parties ne permet cependant pas de montrer l'intégrabilité du troisième membre. Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{sin(x)}{x}$ (prolongée par continuité en 0) n'est pas intégrable mais une intégration par parties permet de justifier l'existence de $\int_{\mathbf{R}} \frac{sin(x)}{x} dx$.
Signalons de nouveau une erreur qui est apparue plusieurs fois : la dérivée d'une fonction intégrable n'a aucune raison d'être intégrable.
Tout comme aux Questions 1 et 2a, il est inquiétant de voir que la notion d'intégrabilité est mal maîtrisée par un trop grand nombre de candidats.

**Question 4** Cette question est une simple application du théorème de continuité sous le signe intégrale qui est aussi valable pour des fonctions de plusieurs variables. La fonction $\Phi_f$ est une fonction de deux variables et il s'agissait bien de montrer la continuité en le couple $(t, x)$ et pas seulement en chacune des variables séparément.

**Question 5a** De nouveau, il était demandé de montrer que $\Phi_f$ était bien de classe $\mathcal{C}^1$ comme fonction de 2 variables. On pouvait utiliser la caractérisation par l'existence et la continuité des dérivées partielles. Il s'agissait ensuite d'utiliser à plusieurs reprises le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
Lors des majorations à établir pour le théorème de dérivation sous le signe intégrale, il faut bien prendre garde que la fonction majorante doit être intégrable par rapport à la variable d'intégration et ne pas dépendre des variables par rapport auxquelles on veut obtenir la continuité ou la dérivabilité. Cette majoration uniforme peut être effectuée sur tout compact dans le cas où cette majoration ne peut être obtenue globalement.

**Question 5b** La relation demandée était une simple conséquence de la dérivation sous le signe intégrale obtenue à la question précédente.

**Question 5c** Cette question découlait de la question précédente et d'une intégration par parties.

**Question 5d** Pour traiter cette dernière question de la première partie, il fallait faire preuve d'initiative et avoir l'idée que pour montrer qu'une fonction $\mathcal{C}$ est constante, il suffit de montrer que sa dérivée est nulle. Pour montrer l'annulation de $\partial_t \int \Phi_f(t, x)\mu(x)dx$, il était plus aisé de multiplier l'intégrale par $\cos(t)$ et appliquer la question précédente avant de dériver. On obtenait que $\partial_t \int \Phi_f(t, x)\mu(x)dx$ était constante sur tous les intervalles de la forme $]\pi/2, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbf{Z}$. La continuité de $t \mapsto \int \Phi_f(t, x)\mu(x)dx$, montrait alors que cette fonction était constante et on pouvait évaluer en 0 pour obtenir le résultat demandé.

## Partie II

**Question 6** Il s'agissait de nouveau du théorème de dérivation sous le signe intégrale et de simple calcul. Répétons que $|h \circ \Phi_f|$ n'est pas majoré par $|h(\sup|\Phi_f|)|$ car $|h|$ n'est pas croissante. Par contre, $\Phi_f$ étant bornée par la norme infinie de $f$ et $h$ étant continue sur l'image de $\Phi_f$, on obtenait que $h \circ \Phi_f$ est bornée.

**Question 7a** L'hypothèse $f(x) \geq \delta > 0$ n'est pas introduite pour rien et servait pour établir les majorations uniformes nécessaires à la dérivation sous le signe intégrale.

**Question 7b** Il s'agissait à nouveau d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il n'y a pas de raison ici que $\sqrt{g} = f'/\sqrt{f}$. En effet, bien que $f$ soit positive, il est possible que $f'$ prennent des valeurs négatives.

**Question 7c** Pour obtenir le facteur $1/4$, il fallait faire des majorations assez fine et ne pas majorer directement sinus ou cosinus par 1 en valeur absolue. Si on n'obtient pas exactement le facteur demandé, il est préférable de remarquer que l'on a pas obtenue l'inégalité optimale (ce qui rapporte déjà des points) plutôt que de tricher pour obtenir exactement le résultat demandé.

**Question 8** Pour cette question un peu délicate, on pouvait utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale à partir de la question précédente lorsque l'on a des majorations uniformes (c'est-à-dire le membre de gauche) et utiliser l'inégalité $\frac{f^2 f'^2}{\delta + f^2} \leq \frac{f^2 f'^2}{f^2} = f'^2$ pour le membre de droite.

## Partie III

**Question 9** On pouvait traiter cette question avec des arguments identiques à ceux des deux premières questions de l'épreuve en prenant garde que $f$ n'était plus nécessairement bornée. Par ailleurs la mesure $m$ n'était pas supposée tout à fait quelconque dans cette partie puisqu'elle vérifie la propriété (1). Certains candidats n'y ont pas pris garde et ont cherché, à tort, à infirmer par un contre-exemple l'intégrabilité demandée.

**Question 10a** Il s'agissait de se ramener à une variable « normale centrée ». On pouvait pour cela retrancher l'espérance puis diviser par l'écart-type. Une fois cela fait, il fallait bien expliquer pourquoi le résultat pour une telle variable normale-centrée entraînait le résultat général.

**Question 10b** Cette question reposait sur un développement limité bien mené. Le caractère borné de $f$ supposé à partir de la question 10 permettait de travailler directement avec des restes en $\mathcal{O}$ plutôt qu'en $o$ ce qui était plus simple à manipuler dans ce contexte. Cette question a été traité par très peu de candidats.

**Question 11a** Il s'agissait ici de reconnaître l'entropie selon $m$ de la fonction $e^{\lambda f/2}$ qui vérifie bien les hypothèses de cette partie. On pouvait donc lui appliquer l'inégalité (1).

**Question 11b** Il était aisé par la question 11a d'obtenir que la dérivée de la fonction indiquée dans l'énoncé était bornée. Le résultat découle alors d'une intégration entre 0 et $\lambda$. La difficulté principale est d'évaluer proprement (a priori par un développement limité) la limite en 0 de la fonction $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda} \ln H(\lambda)$.

**Question 12** Les trois dernières questions de cette parties étaient sans conteste les plus difficiles du sujet et n'ont été réussies que par un nombre très réduit de candidats. Dans cette question 12, la difficulté tenait au fait que si la suite de fonctions $(f_n)$ considérée par l'énoncé converge bien simplement vers $x \mapsto x$ (qui est de dérivée bornée mais n'est pas bornée elle-même) sur $\mathbf{R}$ tout entier, elle n'y converge pas uniformément. Il fallait donc appliquer l'inégalité (3) aux fonctions $f_n$, qui elles sont bien dans $C_b^1$, puis faire tendre $n$ vers l'infini dans chacun des deux membres de l'inégalité. Pour le membre de droite le théorème de convergence dominé s'applique mais pas pour le membre de gauche. Pour le membre de gauche, le théorème naturel à appliquer serait celui de la convergence monotone, mais celui-ci n'étant plus au programme, il fallait prouver l'interversion limite-intégrale "à la main" en exploitant la croissance de l'intégrale.

**Question 13a** Pour estimer la queue de la mesure $m$ il fallait introduire un terme exponentiel, utiliser la question 12 puis optimiser suivant le paramètre $\lambda$.

**Question 13b** Cette question n'a été entièrement traitée par aucun candidat. On pouvait se ramener à étudier l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ en utilisant sur $]-\infty, 0]$ la mesure $x \mapsto m(-x)$ dont les propriétés sont semblables à celles de $m$. L'idée ensuite était d'utiliser la question 13a et via une intégration par partie de se ramener à une sorte de sommation d'Abel continue. Cela permet de montrer que pour $a$ assez grand et $T > a$ arbitraire, l'intégrale de la fonction considérée sur l'intervalle $[a, T[$ est uniformément bornée en $T$, ce qui permet de conclure par positivité de l'intégrande.

## Partie IV

**Question 14a** Il fallait reconnaître la dérivée de $p \circ u$ dans le terme de gauche. Cela incitait à considérer la fonction $P(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} p(x)dx}{\int p(x)dx}$ qui est un difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $[0, 1]$ puis de considérer son inverse $u$ qui répond à la question.

Pour les candidats ayant voulu se ramener à un problème de Cauchy pour des équations différentielles non linéaires, précisons qu'ici seule l'existence locale pouvait être obtenue par le théorème d'Arzela-Peano (qui n'est pas au programme). Ni l'unicité ni l'existence globale ne pouvait être assurées, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'appliquant pas ici. Et encore, celui-ci n'aurait assuré a priori qu'une existence locale et non globale de solution, l'équation différentielle n'étant pas linéaire.

**Question 14b** Il fallait bien voir que la croissance stricte de $u$ et $v$ impliquait aussi celle de $\frac{u+v}{2}$. Le caractère $\mathcal{C}^1$ et les bonnes limites en 0 et 1 permettait de montrer que $w$ est un difféomorphisme. Sans cette propriété de même monotonie pour $u$ et $v$, rien n'assure en général que la somme de deux bijections est encore une bijection.

L'inégalité demandée découlait alors de l'inégalité (4) et de l'inégalité arithmético-géométrique.

**Question 15a** En séparant les cas $y \in A$ et $y \notin A$, on montrait simplement le résultat.

**Question 15b** Cette question reposait sur l'inégalité de Markov.

**Question 16a** Il s'agissait juste de constater que le passage de $A$ à $A_t$ a pour unique effet de décaler les bornes des intervalles dont $A$ est la réunion de $-t$ à gauche et de $+t$ à droite. Les réunions n'ayant pas à être disjointes dans la définition de Int, il n'y a alors aucune difficulté pour conclure.

**Question 16b** On pouvait reconnaître dans le terme $1 - \mu(A_t)$, la mesure du complémentaire de $A_t$ puis conclure à l'aide de la question 15b.