Rapport sur l'épreuve de Mathématiques D, ENS filière MPI (2017)

Xavier Buff (concepteur), Yannick Bonthonneau,
Arthur-César Le Bras, Joseph Thirouin,
Irène Waldspurger (correcteurs/trice)

L'épreuve de 6h de mathématiques de la session 2017 portait sur l'étude qualitative des itérés d'une application $f : I \to I$ monotone par morceaux, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans la première partie, on étudie le cas où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme quadratique. L'objectif est de montrer que l'intersection de l'ensemble de Julia avec l'axe réel est soit vide, soit un intervalle, soit un ensemble totalement discontinu. Dans la deuxième partie, on s'intéresse au cas d'une famille de fractions rationnelles $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ de degré 2 ayant un point critique en 0 dont le second itéré est un point fixe : $f^{\circ 2}(0) = 1 = f(1)$. L'objectif est de montrer que f est semi-conjuguée au polynôme de Tchebychev $x \mapsto 2x^2 - 1$ et d'en déduire des résultats de densité pour l'ensemble des points périodiques. Dans la troisième partie, on introduit la notion d'entropie d'une application monotone par morceaux, et on calcule l'entropie dans deux cas particuliers :

— pour un polynôme cubique impair dont les deux points critiques sont dans un même cycle de période 4 et
— pour des applications tentes (applications affines par morceaux pour lesquelles la valeur absolue de la pente est constante).

Enfin, l'objectif de la quatrième partie est d'étudier et d'utiliser les techniques développées par Milnor et Thurston en 1977 dans le cas où f est une application unimodale (décroissante puis croissante). Ces techniques sont basées sur des séries formelles. Elles permettent de calculer l'entropie de f, connaissant le comportement de l'orbite du point critique.

Statistiques

La répartition des notes est la suivante :

$0 \leq N < 4$	222	21,49 %
$4 \leq N < 8$	464	44,92 %
$8 \leq N < 12$	210	20,33 %
$12 \leq N < 16$	111	10,75 %
$16 \leq N \leq 20$	26	2,52 %
Total	1033	100 %

Moyenne	7,10
Note minimale	0,2
Note maximale	20

À propos du barème

Le nombre de points accordés à chaque question dépendait de la difficulté de celle-ci, les questions longues ou difficiles rapportant davantage. Les petites erreurs ou les problèmes de rédaction entraînaient des malus.

À titre indicatif :

- Faire parfaitement toutes les questions jusqu'à la II.5 (incluse) permettait d'avoir 15.
- En ajoutant à cela les questions de la partie III.1, on atteignait 16,5.
- Avec de petites erreurs, aller jusqu'à la II.5 rapportait autour de 12 ; y ajouter les questions de la partie III.1 permettait d'approcher 14.

Remarques générales

- Dans l'ensemble, les élèves semblent maîtriser correctement les notions d'analyse intervenant dans la première moitié du sujet (suites et fonctions principalement). La plupart des copies contenaient des idées intéressantes et des ébauches de démonstration qui témoignaient d'une bonne intuition des objets manipulés.
- S'il était possible d'avoir une bonne note sans traiter les questions les plus difficiles du sujet, il convenait néanmoins d'aborder au moins un certain nombre de questions de difficulté moyenne. « Grappiller » était peu rentable car les questions faciles, surtout en fin de sujet, rapportaient peu de points.
- Rédiger soigneusement était valorisé. Tous les arguments nécessaires aux raisonnements devaient être explicitement écrits et, à l'exception bien sûr des résultats du programme, tous les énoncés non-triviaux se devaient d'être démontrés.

  Les questions relatives aux notions de pli ou de point critique ont concentré une bonne partie des problèmes de rédaction : beaucoup d'élèves ont semblé avoir compris le principe des définitions, mais n'ont pas su raisonner à leur sujet de manière rigoureuse, se limitant à des arguments informels et un peu vagues.
- Si les rédactions trop rapides étaient à proscrire, l'excès inverse (beaucoup moins fréquent) était également à éviter. Il était par exemple inutile de consacrer toute une page à la question I.1 (censée être très facile), en justifiant minutieusement chaque étape du raisonnement par récurrence. Quelques rares élèves semblent avoir consacré l'essentiel de leurs six heures à rédiger parfaitement la question préliminaire et la partie I ; cela ne permettait malheureusement pas d'avoir la moyenne.
- Avant de manipuler des objets, il convenait de s'assurer qu'ils étaient bien définis (il fallait par exemple établir la dérivabilité de $f^{\circ n}$ à l'intérieur de ses plis dans la question III.3.(a) et l'existence de Θ_x^+ et Θ_x^- dans la question IV.2). Lorsque les objets en question étaient censés satisfaire une définition un peu complexe, il fallait également bien penser à vérifier chacune des propriétés de la définition (par exemple la finitude des points critiques dans la définition de la monotonie par morceaux).

Coquilles et oublis

Quelques coquilles étaient à déplorer dans le sujet : à la question III.2.(c), l'égalité correcte était $v_{n+1} = {}^tM \cdot v_n$ (et non pas M). Dans le préambule de la question IV.2, l'argument de la fonction θ_n est y par deux fois (et non pas x).

Un oubli doit être signalé à la question II.6 : en plus de la continuité et de la croissance, il faut exiger que la fonction $\phi : I \to I$ soit surjective, sans quoi la fonction constante égale à 1 convient.

Question préliminaire

Cette première question était d'ores et déjà difficile.

Il était naturel de raisonner par récurrence et de décrire les plis de $f^{\circ(n+1)}$ en fonction des plis de $f^{\circ n}$ et de f. Parmi les erreurs courantes, quelques copies ont admis sans démonstration que la composée de deux fonctions monotones par morceaux, g et h, était monotone par morceaux. D'autres, assez nombreuses, ont écrit, en notant $I_1, \ldots, I_k$ les plis de g et $J_1, \ldots, J_\ell$ ceux de h, que les plis de $g \circ h$ étaient les $I_s \cap J_t$ (il s'agissait en fait des $h^{-1}(I_s) \cap J_t$). Certaines ont donné une expression correcte pour les plis mais ont oublié de montrer que ceux-ci étaient en nombre fini. Enfin, la majorité a supposé, au moins implicitement, que f était continue.

Partie I

Cette partie, consacrée à l'étude des itérées de la fonction $f_c : x \mapsto x^2 + c$ en fonction des valeurs du paramètre $c \in \mathbb{R}$ a été, sans surprise, la plus largement abordée. L'apparente facilité des questions était trompeuse, car d'emblée, quelques subtilités ont permis de distinguer les copies de bon ou très bon niveau. L'attention au détail, la rigueur absolue de raisonnement, et la concision ont été autant de qualités largement valorisées dans le barème.

1. Toutes les copies procèdent par récurrence, mais près d'une sur deux répond que la suite est $x_n = x_0^{2n}$, au lieu de $x_0^{2^n}$. Une telle erreur en début de copie coûte cher : elle met cruellement en lumière que pour certains élèves, le raisonnement par récurrence est un outil purement formel, un artifice de rédaction plus qu'un mode de raisonnement.

2. Question très facile. Les correcteurs ont été attentifs à la rigueur de la résolution de l'équation du second degré par équivalences.

3. Certains confondent la croissance de la suite et la croissance de la fonction f_c, mais en général, cette question est bien traitée, et le théorème de la limite monotone est correctement invoqué.

4. Cette question présente une difficulté, car son enjeu véritable (montrer que $c \geq -\beta_c$) devait être trouvé par l'élève. Beaucoup peinent à prendre l'initiative de montrer un résultat que l'énoncé ne mentionne pas ; d'autres s'égarent ici dans d'interminables disjonctions de cas. Les copies qui ont su proposer une résolution nette et parcimonieuse de cette question ont fait montre d'une louable hauteur de vue, qui a été récompensée.

5.(a) Question assez facile, mais qui nécessitait une intelligence claire des notations et des notions topologiques. Le flou qui règne autour de ces dernières confirme que cette partie du programme est rarement dominée :

beaucoup trop d'élèves pensent que l'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact, par exemple. Certains bons éléments, trop soucieux de faire étalage de leur savoir, se lancent sans guère réfléchir dans un raisonnement de compacts emboîtés, juste, mais fastidieux, où ils perdent du temps et un peu de la patience des correcteurs.

5.(b) Comme à la question 4, la difficulté était de comprendre qu'il fallait prouver que $0 \notin (a_n, b_n)$. Un tiers des copies y parviennent environ.

5.(c) Cette question, quoique sans grande difficulté, demandait un soin spécial que seules quelques copies ont su fournir : la justification du changement de variable, le maniement des valeurs absolues (pour prendre en compte le fait que l'ordre des bornes de l'intégrale n'est pas connu), ou la minoration de la fonction intégrée étaient autant de chausse-trapes. Il est regrettable que presque personne n'ait cité sans omettre d'hypothèse le résultat selon lequel une fonction positive, continue, d'intégrale nulle sur un intervalle est identiquement nulle sur cet intervalle.

Partie II

La plupart des copies ont traité la première moitié de cette partie (jusqu'à la question 4 ou 5), souvent de manière imparfaite car on y trouvait déjà des difficultés significatives. Seule une poignée est allée au-delà : à partir de la question 6, le sujet devenait effectivement très difficile.

1. Cette question, sans difficulté particulière, a été bien traitée par un grand nombre de copies. Il fallait toutefois faire attention à ne pas écrire de division par zéro et, si le raisonnement l'exigeait, à citer explicitement le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Beaucoup de copies contenaient le bon principe de raisonnement mais la rédaction était parfois trop vague (« f_a envoie chaque pli de $f_a^{\circ n}$ sur deux plis de $f_a^{\circ(n+1)}$ », sans aucune justification). Même dans les copies qui avaient fait un effort certain de formalisation, certains arguments étaient souvent laissés dans l'ombre, notamment le fait qu'un point critique de $f_a^{\circ n}$ reste un point critique de $f_a^{\circ(n+1)}$ ou qu'un point où $(f_a^{\circ n})'$ s'annule est un point critique de $f_a^{\circ n}$.

3.(b) Il fallait déduire de la question (a) l'expression d'un certain nombre de points critiques puis montrer leur densité. Selon le mode de rédaction choisi, il pouvait être naturel d'utiliser le fait que l'image par cos d'un sous-ensemble dense de $[0; \pi]$ est dense dans $[-1; 1]$. Ce fait devait alors être correctement justifié (par la continuité et la surjectivité de cos).

4. Beaucoup de copies ont abordé cette question mais très peu l'ont traitée parfaitement. Une première difficulté consistait à montrer la π-périodicité de h_a : attention, la primitive d'une fonction π-périodique n'est pas nécessairement π-périodique ; ce n'est le cas que si son intégrale sur un intervalle de longueur π est nulle. La démonstration de l'inégalité $f_a \circ \cos = \cos \circ F_a$ a également posé des problèmes. Beaucoup de copies ont affirmé à tort que $\arccos \circ f_a \circ \cos$ était dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'en sont servi pour démontrer l'égalité $\arccos \circ f_a \circ \cos = F_a$ (qui n'était pas vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier). Il fallait se restreindre à l'intervalle $]0; \pi/2[$, démontrer l'égalité sur cet intervalle uniquement puis procéder par recollement.

6. Cette question était l'une des plus difficiles de l'épreuve. Il fallait avoir l'idée de considérer $\phi = \cos \circ \Phi \circ \arccos$ puis démontrer l'égalité demandée en s'aidant des questions 4 et 5. Comme dans la question 4, il fallait faire attention à ne pas écrire

$$F_a = \arccos \circ f_a \circ \cos$$

On pouvait en revanche montrer et utiliser le fait que, pour tout t,

$$F_a(t) \equiv \pm \arccos(f_a(\cos(t))) \quad [2\pi].$$

7.(a) Cette question était un simple calcul ; le barème ne lui accordait donc que peu de points.

7.(b) Cette question était en revanche très difficile ; seules quelques copies l'ont traitée. Plusieurs solutions étaient possibles. L'une d'entre elles était de calculer l'inverse des Φ_n en fonction de l'inverse de F_a, puis de montrer la convergence uniforme de $(\Phi_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$, par la même méthode qu'à la question 5.

8. Cette question n'a également été traitée que de manière rarissime. Pour la résoudre, on pouvait montrer l'inégalité $f_a'(1) < 1$ et en déduire l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in \,]1-\varepsilon; 1[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondante convergeait vers 1.

Partie III

La partie III était consacrée à l'étude de l'entropie de certaines fonctions monotones par morceaux et faisait intervenir un peu d'algèbre linéaire. Les questions III.2.(c) et III.3.(c) mises à part, les questions de cette partie n'étaient pas excessivement difficiles, mais demandaient de combiner soigneusement calculs et petits arguments. Cette partie a donc permis elle aussi de distinguer assez nettement les copies de très bon niveau.

1.(a) Question très simple. Certaines copies se lancent toutefois dans des tentatives de justification inutilement compliquées du fait (évidemment faux) que $\lambda(f) > 1$.

1.(b) De même que pour la question préliminaire, certaines copies semblent ne pas avoir compris ce qu'est la composée de deux fonctions et majorent le nombre de plis $\lambda(f \circ g)$ de $f \circ g$ par $\lambda(f) + \lambda(g)$. Même lorsque l'idée de l'argument a été comprise, la rédaction de cette question laisse souvent à désirer.

1.(c) Peu de copies pensent à effectuer la division euclidienne de n par k. Celles qui l'ont fait ont donc été récompensées. Beaucoup se contentent de poser $r = n - k$.

1.(d) Cette question était un peu plus subtile que la précédente. Bon nombre de copies passent à la limite sans avoir au préalable justifié l'existence de la limite ; certaines entreprennent même sans succès de montrer que la suite considérée est décroissante.

1.(e) La question n'était pas difficile, mais demandait un peu de lucidité, à un stade déjà avancé du sujet. Cela s'est senti à la correction : certaines copies n'arrivent pas à conclure correctement alors qu'elles ont en main tous les éléments.

2.(a) Question calculatoire. Les points n'ont été accordés que si les calculs étaient menés sans aucune erreur.

2.(b) Cette question ne présentait pas non plus de réelle difficulté mais a été mal réussie. On ne trouve souvent que des demi-justifications : est-ce parce que ces copies ont voulu se débarrasser de la question au plus vite, ou pour raison de fatigue ?

2.(c) Question bien plus délicate que les précédentes, et compliquée encore par la coquille contenue dans l'énoncé [1]. On compte sur les doigts de la main les excellentes copies ayant traité la question.

2.(d) La détermination de M est souvent correcte, mais peu de copies effectuent correctement le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice 3×3...

2.(e) Question peu abordée. Les copies qui s'y risquent semblent en général avoir compris l'idée mais oublient presque toujours de montrer que v_1 n'est pas contenu dans la somme des deux sous-espaces propres associés aux valeurs propres -1 et $1-\sqrt{2}$.

3.(a) Les copies qui ont touché à cette question l'ont en général fait correctement, même si la rédaction était rarement parfaitement satisfaisante.

3.(b) Question traitée dans peu de copies, et en général malheureusement de travers.

3.(c) Cette question était difficile et a été très peu abordée.

3.(d) Il suffisait de mettre ensemble les résultats de la question III.3.(a) d'une part et des questions III.1.(e) et III.3.(c) d'autre part.

Partie IV

Cette dernière partie de l'épreuve a bien sûr été abordée par relativement peu de monde. Comportant des questions difficiles, il aurait été surprenant qu'elle soit traitée entièrement, et effectivement cela n'a pas été le cas. La plupart des élèves qui y ont touché ne l'ont probablement fait qu'en fin d'épreuve, dans l'espoir de grappiller des points faciles. Autant les questions difficiles étaient bien rémunérées, autant à ce niveau du sujet, les questions faciles ne valaient que très peu de points. En conséquence de quoi, il n'est pas évident que l'investissement en temps, pour cette partie du sujet, ait été très « rentable ».

1.(a) Question très simple. Il s'agissait tout de même de donner une justification, ne serait-ce que rapide.

1.(b) Il fallait constater que $f^{\circ n}(a) = f^{\circ(n-1)}(b) = b$ pour $n \geq 1$. Un certain nombre de copies semblaient avoir compris le phénomène, mais des erreurs de signe malheureuses les ont fourvoyées.

1.(c) Bien que chaque étape de cette question ne soit pas très difficile, assez peu de personnes ont réussi à les surmonter toutes.

Notons que les questions suivantes ont été très (très) peu traitées.

1.(d) Étant donnés $x, y \in I$, il fallait commencer par considérer le plus petit indice pour lequel $\theta_n(x) \neq \theta_n(y)$, ce qui était fortement suggéré par la question précédente. Il fallait ensuite utiliser l'hypothèse $z \in [0, 1/2]$, dont certaines copies ont cru pouvoir se passer.

2.(a) (Il y avait une erreur dans le sujet dans la définition de $\Theta^{\pm}$.) Le fait que la définition des $\theta_n^{\pm}$ ait un sens a rarement semblé digne de vérification. Ici, il fallait d'abord considérer le cas où $f^{\circ n}(x)$ n'est jamais

1. Coquille qui n'était pas *stricto sensu* une erreur, car l'énoncé était littéralement correct, la matrice M étant symétrique...

égal à c_0. L'ensemble de ces points est en fait le domaine de continuité de l'application $x \mapsto \Theta_x$. Il fallait ensuite montrer que quand n est le premier entier pour lequel $f^{\circ n}(x) = c_0$, alors θ_k change de signe en x quand $k \geq n$. D'une part, $\theta_n^+(x) = -\theta_n^-(x)$, et d'autre part, $\epsilon^+(f^{\circ(n+\ell)}(x)) = \epsilon^-(f^{\circ(n+\ell)}(x))$ quand $\ell \geq 1$. Cette deuxième partie reposait sur une discussion de la position de $f^{\circ \ell}(c_0)$. On compte sur les doigts de la main les copies qui ont touché ce point.

2.(b) En répondant à la question précédente, il était naturel d'avoir déjà répondu à la première partie de celle-ci. Pour la deuxième partie, un certain nombre de copies ont admis sans justification que $\theta_{n+j}^{\pm}(x) = \theta_j^{\pm}(c_0)$, ce qui n'était pourtant pas si évident.

3.(a) Le cas récurrent a été traité plusieurs fois. Le cas des points périodiques, par contre, a eu moins de succès.

3.(b) Il suffisait ici de constater que le nombre de changements de signe était plus petit que le nombre de plis.

3.(c) Cette question très facile n'était pas cher payée.

3.(d) Question non traitée. Il s'agissait de recenser les points de discontinuité de $x \mapsto \Theta_x$, et de comprendre la nature de ces discontinuités.

4.(a) Il s'agit d'appliquer les critères usuels de convergence des séries entières.

4.(b) Ici, il fallait comprendre que les points critiques de $f^{\circ n}$ pouvaient être séparés en deux groupes avec d'une part ceux de $f^{\circ(n-1)}$, et d'autres part les points x où $f^{\circ(n-1)} - c_0$ changeait de signe. Avoir fait la question 3.(d) aurait dû aider les élèves. Mais ni l'une ni l'autre n'ont été traitées entièrement.

4.(c) En combinant les questions 3.(b) et 4.(b), il ne restait plus qu'à effectuer des manipulations algébriques. Les quelques copies qui ont fait cela sans avoir fait ce qui précède n'en ont pas retiré beaucoup de points...

5.(a) Les relations données permettaient de calculer les coefficients δ_n sans difficulté. Il n'était pas non plus nécessaire de se préoccuper de la traduction en termes un peu plus géométriques de l'énoncé. Il aurait été bienvenu de remarquer que l'on était dans le cas $1/4 > c > -2$ de la partie I.

5.(b) En utilisant la question 4.(c), il ne restait qu'un calcul simple à faire.

5.(c) Question facile.

5.(d) Il suffisait de développer Λ_f en série entière. Cela supposait d'avoir au préalable décomposé Λ_f en éléments simples.