RAPPORT SUR L'ÉPREUVE ORALE SPÉCIFIQUE DU CONCOURS 1ÈRE ANNÉE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY ET DE RENNES

N. Aguillon, L. Goudenège, C. Laurent.

Coefficient de l'épreuve (en pourcentage du total d'admission) : 12,3% pour les deux écoles.

L'épreuve d'orale spécifique de mathématiques pour les ENS Paris-Saclay et de Rennes a une durée de 45 minutes, sans préparation. L'oral commence par une question simple et/ou proche du cours. Elle est ensuite suivie d'un exercice, contenant souvent des questions intermédiaires, avec ou sans lien avec la première partie de l'oral. La personne interrogée a du temps pour réfléchir seule à l'abord d'un nouvel exercice ou d'une nouvelle idée. Une conversation s'engage ensuite avec le jury qui va donner des pistes, demander des précisions ou des exemples simples, etc. L'objectif, outre de tester les connaissances mathématiques des aspirant·e·s normalien·ne·s, et de les voir travailler en situation de recherche sur des problèmes souvent difficiles.

Le jury a trouvé que l'ensemble des candidat·e·s était d'un très bon niveau et en général bien préparé à l'exercice. Nous avons noté en particulier de nets progrès sur la maîtrise du programme de probabilités, avec une bonne maîtrise des techniques de dénombrement et des lois classiques. L'algèbre linéaire et les critères de diagonalisation sont bien maîtrisés par la majorité des candidat·e·s, qui a de bons réflexes sur ce genre de problèmes.

A contrario, des difficultés ont été notées en calcul différentiel à plusieurs variables. La notion de différentielle semble poser problème. En particulier, lorsqu'il s'agit de faire des calculs effectifs sur des exemples concrets, plusieurs candidat·e·s ont fait des confusions sur ces problèmes : lorsqu'il·elle·s écrivaient la différentielle au point x dans la direction h, certain·e·s hésitaient sur la linéarité par rapport à la variable h. Les problèmes où la géométrie apparaît posent aussi des difficultés à beaucoup de candidat·e·s. Nous avons également noté que si les candidat·e·s maîtrisent bien l'aspect calculatoire des développements limités et des équivalents, le côté local de la notion est souvent mal compris.

Exemple : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. *On suppose $n = 1$ et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs réelles telle que $g^2(x) = f(x)$ pour $x \in B(0,\varepsilon)$. Que se passe-t-il si f est développable en série entière ? A-t-on forcément $g(x) = \mp\sqrt{f(x)}$?*
2. *Montrer que c'est faux si $n \geq 2$.*

La question 1 n'est pas facile mais on peut traiter des cas de difficultés croissantes, ce qui n'a été que rarement proposé. Les personnes interrogées « sentent » que le premier indice doit être pair, mais la démonstration et le rôle du ε ont posé des difficultés. Enfin il ne faut pas oublier de vérifier la régularité.

Notons que les problèmes faisant intervenir la géométrie ont dérouté les candidat·e·s. Par exemple l'interprétation géométrique de la projection orthogonale n'était pas toujours claire et, plus généralement, la traduction mathématique de propriétés évidentes sur un dessin était souvent laborieuse (quand le dessin était fait).

Exemple : Soient U et V deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.

1. *Montrer qu'il existe une matrice O orthogonale réelle telle que $\langle U, OV \rangle \neq 0$.*
2. *Montrer qu'il existe une matrice S symétrique réelle telle que $\langle U, SV \rangle \neq 0$.*

Sur ce (début) d'exercice, le jury a été surpris de constater que les personnes interrogées ne commencent pas par traiter les cas simples (vecteurs non orthogonaux, cas de la dimension 2). Dans la question 1, l'interprétation géométrique a posé problème et plus encore la formalisation une fois l'idée trouvée.

Nous avons aussi trouvé que certain·e·s candidat·e·s pensaient d'abord à l'utilisation de théorèmes évolués avant de vérifier des notions plus simples. L'utilisation de notions hors programme pour démontrer des notions du programme est à proscrire. Nous avons noté plus généralement que les candidat·e·s sont souvent dérouté·e·s par les choses simples, tout en maîtrisant parfaitement bien des points très techniques ou hors programme.

Exemple : Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que M est diagonalisable.

Ceci peut se démontrer à la main sans utiliser de résultat du cours (lemme des noyaux ou autres). De même, dans une formule comme $P^{-1}MP = D$, on s'attend à pouvoir retrouver rapidement qui est la matrice P.

Voici quelques conseils sur le déroulement de l'oral.

— Les candidat·e·s devraient toujours penser à vérifier la validité de leur résultat face à des contre-exemples évidents ou des relations d'homogénéité. Cela leur permettrait de corriger par eux-même des erreurs (parfois dues au stress ou à la volonté de rapidité) sans attendre que l'examinateur les fasse vérifier. Un tel sens critique est apprécié lors de l'oral.

— Il faut trouver un bon équilibre entre l'exploration de multiples pistes et l'obstination. La personne interrogée a le temps de creuser quelques pistes (quitte à prévenir l'examinateur d'une incertitude sur le débouché final) et il ne faut pas chercher à « combler le vide » en parlant tout le temps. A contrario, on a vu quelques candidat·e·s refuser de changer de piste malgré des indications insistantes du jury.

— L'échange avec le jury est important. Les demandes d'éclaircissement sont à prendre en compte. Dire à l'oral que « c'est simple » et « qu'il suffit de faire ceci » et renacler à le rédiger est de très mauvais effet.

— En cas de gros blocage ou de lourdeur dans une ébauche de preuve, il arrive que le jury propose d'admettre le résultat et de passer à la suite. Les candidat·e·s ne doivent pas se laisser déstabiliser par cette sensation d'échec passager, l'expérience montrant que certain·e·s effectuent ensuite des rétablissements spectaculaires.