

Rapport sur l'oral de Mathématiques spécifique ENS de Lyon

Coefficient (en pourcentage du total d'admission) : 16,2%

Membres du jury : Gregory Ginot, Fanny Kassel, Maxime Zavidovique

1 Commentaires d'ordre général

Commençons par rappeler le déroulement de l'oral type. L'examineur commence par dicter l'énoncé au candidat et le laisse réfléchir pendant environ une dizaine de minutes. Cette étape est primordiale à plusieurs égards. Tout d'abord, c'est à ce moment que le candidat doit s'assurer qu'il comprend bien l'énoncé, que tous les mots sont bien clairs, sinon il doit en faire part à l'examineur qui ne lui en tiendra jamais rigueur. C'est ensuite la phase de l'oral où le candidat peut probablement le plus faire preuve de créativité. On attend de lui qu'il soit réactif, teste quelques cas particuliers, éventuellement étudie des énoncés plus faibles... Ceci ne veut pas dire pour autant qu'il doit meubler à tout prix pour dire des choses qui ne seraient pas pertinentes. Quelques instants de silence ne seront pas reprochés au candidat.

S'installe enfin une période de dialogue, en fonction des situations, l'examineur guide le candidat en lui donnant des indications. Bien sûr le candidat n'est pas forcé de suivre ces indications même s'il y est incité.

Parfois, l'examineur pourra poser des questions plus directes pour tester les connaissances du candidat ou pour revenir sur un point erroné du raisonnement de ce dernier. Une erreur ne sera que très rarement considérée comme réhibitoire. On attend en revanche que le candidat soit capable de faire preuve d'autocritique et que dans une démarche scientifique constructive, il puisse la corriger. Dans la même veine, même si au cours de la conversation le candidat peut avancer des idées vagues et faire part de ses intuitions, on attend de lui qu'il finisse toujours par développer une démonstration mathématique complète et correcte.

Terminons par quelques remarques sur les exercices posés. Ils sont de difficultés et de natures très différentes. L'examineur en a tout à fait conscience et le prend en compte dans sa notation. Parmi les qualités appréciées chez le candidat, est la capacité à juger de cette difficulté. Il ne faut en aucun cas que le candidat désespère s'il ne trouve pas immédiatement la solution à l'exercice qui lui est proposé. Garder une attitude positive et chercher activement des angles d'attaque sont des aspects de l'oral grandement valorisés. On a constaté trop souvent des candidats qui restent muets en attendant que l'examineur donne une indication.

Certains candidats s'autocensurent parfois et se refusent à utiliser des notions hors programme. Gageons qu'un peu de culture mathématique ne sera jamais reprochée. Toutefois, le candidat devra faire preuve d'honnêteté intellectuelle et rester conscient qu'il risque d'être interrogé concernant toute notion qu'il évoque. Évidemment, aucun exercice posé ne nécessite des notions hors-programme.

L'organisation du concours force à respecter un emploi du temps très précis. Une fois l'oral fini, le candidat doit quitter la salle rapidement.

2 Quelques exemples d'exercices commentés

2.1

Soit ε une suite de 0 et de 1. On utilise par la suite l'ordre lexicographique sur les suites. On dit d'une suite ε qu'elle est *admissible* si

- $\varepsilon_k = 0$ implique $(\varepsilon_{k+i}) < (\varepsilon_i)$ et
- $\varepsilon_k = 1$ implique $(1 - \varepsilon_{k+i}) < (\varepsilon_i)$.

1. Donner des exemples de suites admissibles.

2. Montrer qu'une suite admissible ne peut pas commencer par un 0, ni par un bloc de la forme $s\bar{s}$ où s est un mot fini et $\bar{s} = 1 - s$ et où la dernière lettre de s est 1.
3. Montrer que la suite (t) , définie par t_n vaut 0 si n a un nombre pair de 1 dans son écriture binaire et 1 sinon, est admissible.
4. Montrer que t est la plus petite suite admissible.

Cet exercice d'énoncé somme toute élémentaire testait en premier lieu la capacité du candidat à assimiler une définition donnée, chercher des exemples, contre-exemples, en d'autres mots à faire preuve d'initiative. Les deux dernières questions étaient évidemment plus délicates et le jury ne s'attendait pas forcément à ce qu'un candidat les résolve sans aide. On pouvait, par exemple, dans la question 3, penser à regarder l'écriture des indices de la suite en base 2 et, pour une valeur i où $t_i = 0$, une décomposition $i = 2^n + 2^m + j$ en isolant les facteurs les plus grands de la décomposition ; dans le cas $t_i = 1$ on pouvait utiliser le cas précédent en isolant le terme le plus grand de la décomposition en base 2 de j .

2.2

Soit G un sous-groupe de $GL_d(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $k \in [0, 2[$ tel que

$$\forall M \in G, \quad \|M - \text{Id}\| \leq k,$$

(où $\|\cdot\|$ est la norme d'endomorphisme associée à la norme standard sur \mathbb{C}^d). Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall M \in G, \quad M^n = \text{Id}.$$

Cet exercice est très différent du précédent, les attentes du jury en conséquence n'étaient pas les mêmes. Ici le candidat pouvait faire appel aux réflexes qu'il a acquis dans son étude de l'algèbre linéaire et de l'algèbre plus généralement. Il pouvait penser à étudier les valeurs propres des matrices M dans G , et trouver les conditions que l'énoncé implique sur leurs valeurs, puis utiliser que les valeurs propres des puissances M^k de M vérifient les mêmes conditions. Bien sûr, s'il n'y pensait pas il y était encouragé par l'examineur.