Épreuve Oral Maths Ulm
Rapport du jury

François Charles et Nicolas Curien

1. Déroulement de l'épreuve

Un des buts de l'oral MPI Ulm est d'évaluer, outre les connaissances et la maîtrise technique des candidats, leur capacité à comprendre, à interpréter et à réagir dans des situations mathématiques nouvelles. L'oral s'écarte ainsi parfois du format traditionnel et prend généralement la forme d'un dialogue entre l'examinateur et le candidat. Le candidat est informé dès le début de l'épreuve que l'exercice de mathématique n'est qu'un prétexte à la discussion et que c'est celle-ci qui sert de base à l'évaluation. Il n'est donc pas obligatoire de résoudre en entier l'exercice pour réussir l'oral et certaines questions sont posées sous forme ouverte afin de tester les réactions du candidat.

Lors de cette session 2017, les candidats étaient confrontés à un problème mathématique, d'énoncé souvent court, et dont la solution nécessitait un cheminement généralement complexe. Après quelques minutes de réflexion, l'examinateur interroge le candidat sur les approches possibles, les cas particuliers traitables, les exemples instructifs, etc. Suit un dialogue où l'examinateur questionne le candidat ou propose des pistes de réflexions. L'exercice « principal » était généralement interrompu quelques minutes avant la fin de l'oral pour poser des questions de cours ou de petits exercices sur d'autres parties du programme.

2. Commentaires généraux

Niveau général : le niveau mathématique des candidats interrogés lors de cette épreuve reste très élevé ; la sélection à l'écrit a visiblement été efficace. Cela permet de poser des exercices au contenu mathématique ambitieux lors de cet oral. Nous tenons à remercier tous les candidats qui nous ont donné l'occasion d'avoir un échange d'un réel intérêt scientifique.

Sur le cours : les réflexes de taupe et les exercices classiques font partie du bagage d'une grande majorité des candidats. En revanche, la connaissance en profondeur du cours de MPSI et MP reste parfois insuffisante. En effet bien que la plupart des candidats connaissent les énoncés des théorèmes au programme, leurs démonstrations sont parfois floues, imprécises ou oubliées. Les candidats sont souvent incapables de produire des contre-exemples aux théorèmes au programme une fois qu'une des hypothèses est relâchée. Même si la manipulation des objets au programme est généralement bonne, leur définition précise est parfois oubliée.

À propos du hors-programme : tous les exercises posés étaient accessibles avec le programme de MP* et aucun complément hors programme n'était requis dans la compréhension ou la résolution de l'exercice. Bien sûr, les très bons élèves qui maîtrisent plus que le programme peuvent occasionnellement être avantagés dans la résolution des exercices. En revanche la méconnaissance du programme strict au profit de compléments plus avancés a certainement désavantagé certains candidats. Si par exemple un candidat utilise du hors-programme pour résoudre une question « facile » et accessible, il s'expose à des questions plus pointues sur les outils utilisés (si un candidat utilise par exemple le théorème de Jordan pour résoudre une question d'algèbre linéaire simple, il ne s'étonnera pas qu'on lui en demande la preuve et qu'on le questionne sur la nécessité de toutes les hypothèses).

Comment débuter un exercice : l'abord d'un exercice difficile est peut-être la partie la plus épineuse de cet oral. Les candidats devraient plus souvent avoir le réflexe de prendre des cas particuliers, faire des dessins, renforcer les hypothèses, établir des résultats partiels. Il est arrivé plusieurs fois qu'après une dizaine minutes de réflexion du candidat, le jury soit obligé de proposer l'étude des cas triviaux $n = 1$ ou $n = 2$ ou de tenter de faire le lien avec des théorèmes au programme.

Quelques exemples d'exercices

Nous avons choisi ici quelques exercices posés lors de cette session que nous n'avons pas retrouvés dans les livres classiques d'exercices de taupe (d'où la sur-représentation des exercices de probabilités, d'algèbre et de géométrie).

Exercice 1 (Entropie au sens de Shannon)**.** *Soit (E, p) un espace probabilisé fini. Pour tout $n \geq 1$, on munit E^n de la mesure produit $p^{\otimes n}(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) \cdots p(x_n)$. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, si on note*

$$S_\varepsilon(n) = \inf\{\mathrm{Card}(A) \mid A \subset E^n \text{ tel que } p^{\otimes n}(A) \geq 1 - \varepsilon\},$$

alors $\frac{1}{n} \log S_\varepsilon(n)$ converge lorsque $n \to \infty$ vers une quantité indépendante de ε et en donner une expression.

Exercice 2 (Existence de racines carrées)**.** *Soit k un corps et soit $(k^*)^2$ le groupe multiplicatif des carrés de k^*. Une racine carrée est un morphisme de groupe*

$$r : (k^*)^2 \to k^*$$

tel que pour tout $x \in (k^*)^2$, on ait $r(x)^2 = x$. Discuter l'existence et l'unicité des racines carrées dans le cas où $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Exercice 3 (Un théorème de Kakutani)**.** *Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes (pas forcément identiquement distribuées) à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et telles que $\mathbb{E}[X_i] = 1$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que*

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to \infty]{(\mathbb{P})} 0 \quad \iff \quad \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[\sqrt{X_i}] = 0.$$

NB : la notion de convergence en probabilité vers une constante était rappelée en début d'oral.

Exercice 4. *Soit L_1, L_2, L_3, L_4 quatre droites de $\mathbb{R}^3$ en position générale (donner un sens mathématique à cette condition faisait partie de l'exercice). Combien peut-on trouver de droites L qui coupent L_1, L_2, L_3 et L_4 ?*

Exercice 5. *Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de vaiid à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$. On pose $R_n = \mathrm{Card}(\{X_1, \dots, X_n\})$.*

— *Montrer que $\mathbb{E}[R_n] = o(n)$ en général.*
— *Montrer que si $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ alors $\mathbb{E}[R_n] = o(\sqrt{n})$.*
— *Discuter l'optimalité de ces résultats.*

Exercice 6. *Étant données des matrices X et Y, on note $[X, Y] = XY - YX$. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $[A, [A, B]] = 0$. Montrer que $[A, B]$ est nilpotente.*