ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2018

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche, à fonctionnement autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet comprend deux parties indépendantes, de poids inégaux. La première est un questionnaire de connaissance générale et la seconde un problème.

A – Questionnaire

On formulera les réponses de façon concise (en quelques lignes), mais claire et précise. Il n'est pas attendu de justification des réponses données ni de définition des éventuelles notations introduites.

1. Définir la notion de stigmatisme en optique.
2. Représenter le schéma d'un circuit électrique résonant.
3. Indiquer l'unité SI de la conductivité thermique.
4. Écrire l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.
5. Préciser la notion de distribution de BOLTZMANN.
6. Indiquer une utilisation d'un interféromètre de MICHELSON.
7. Énoncer les lois de KEPLER.
8. Écrire la relation de BERNOULLI.
9. Donner, en mètres, la distance Terre-Soleil.
10. Donner une estimation de la masse de la Terre.

B – Étude d'un écoulement de fluide newtonien sous cisaillement

1 Cisaillement en géométrie plane.

Nous considérons un domaine de fluide (de l'eau) compris entre deux plaques horizontales infinies, séparées d'une distance H (voir figure (**1**)). Ce système est initialement au repos. Nous notons ρ la masse volumique du fluide et η (resp. ν) sa viscosité dynamique (resp. cinématique). Au temps $t = 0$, on impose un échelon de vitesse à la plaque inférieure (la plaque supérieure étant maintenue immobile) :

$$\begin{cases} \vec{U}(t<0) = \vec{0} \\ \vec{U}(t \geq 0) = U\,\vec{e}_x \quad (U = \text{Cste} \in \mathbb{R}_+) \end{cases} \tag{1}$$

En réponse à cette pertubation, nous adoptons, *a priori*, un champ de vitesse du fluide laminaire :

$$\vec{v}(\mathrm{M},t) = v(z,t)\,\vec{e}_x \tag{2}$$

Nous admettrons que le champ de pression initial dans le fluide n'est pas modifié par ce champ de vitesse.

Données.

- $H = 10\,\text{cm}$
- $\rho = 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- $\eta = 10^{-3}\,\text{Pa}\cdot\text{s}$

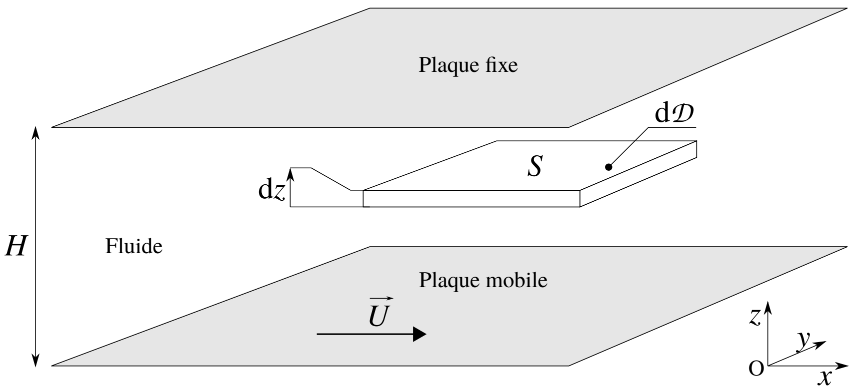

FIGURE **1** – Fluide en situation de cisaillement plan : le fluide est mis en mouvement par la plaque inférieure, mue à la vitesse $\vec{U}$. Le référentiel $\mathcal{R}(\mathrm{O},x,y,z)$, supposé galiléen, est lié au laboratoire.

1. Déterminer la valeur numérique de la viscosité cinématique ν en précisant son unité (dans le système international).
2. Préciser l'hypothèse qui préside au choix du champ de vitesse particulier (2) adopté.
3. Dans le régime transitoire comme stationnaire, préciser, en le justifiant, le signe de $\partial v/\partial z$ dans le fluide.
4. Considérons une tranche horizontale de fluide $\mathrm{d}\mathcal{D}$, située à l'altitude z, d'épaisseur $\mathrm{d}z$ et de surface S (voir figure (**1**)). Exprimer chacune des forces de viscosité qui s'exercent sur cette tranche.
5. En déduire une équation différentielle dont la vitesse v est solution. On y fera apparaître, comme seul paramètre, la viscosité cinématique ν.
6. Préciser le nom donné à cette forme d'équation différentielle. Indiquer un autre domaine de la physique où on la rencontre également.
7. Exprimer la solution stationnaire $v^\infty = v^\infty(z)$ de cette équation puis représenter le profil de vitesse correspondant.
8. Construire le temps caractéristique t^∞ nécessaire à l'établissement du régime stationnaire. Commenter ce résultat.

- On impose maintenant une vitesse oscillante harmonique à la plaque inférieure, écrite, en notation complexe :

$$\underline{U}(t) = U \exp\{i\omega t\} \quad (\omega \in \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}_+) \tag{3}$$

Nous recherchons alors le champ de vitesse dans le fluide sous la forme (on ne s'intéresse qu'au régime permanent) :

$$\underline{v}(z,t) = A \exp\{i(\omega t - kz)\} \quad \text{où} \quad A \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{C} \tag{4}$$

Nous supposons que les conditions expérimentales nous permettent de considérer le milieu comme étant également "infini" selon la direction $(\mathrm{O}z)$.

9. Établir la relation de dispersion liant k à ω.

10. Exprimer les solutions $k = k(\omega)$ de cette équation de dispersion. On introduira une longueur caractéristique δ.

11. Exprimer la solution $\underline{v} = \underline{v}(z,t)$ recherchée puis le champ de vitesse réel $v = v(z,t)$ correspondant.

12. Représenter le profil de vitesse (réel) pour trois instants "proches".

13. Discuter le sens physique attribuable à δ.

14. Préciser à quelle condition l'hypothèse de milieu infini (selon la direction $(\mathrm{O}z)$) adoptée reste licite.

15. Exprimer la puissance p_{op}, par unité de surface de plaque et moyennée sur une période $T = 2\pi/\omega$ d'oscillation, fournie par l'opérateur mécanique imposant la vitesse harmonique à la plaque inférieure. On exprimera ce résultat en fonction de ρ, η, U et ω. Analyser ce résultat.

On pourra utiliser directement la relation (5), où x et y sont deux fonction harmoniques réelles de période T :

$$\langle x \times y \rangle_T = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \underline{x} \times \underline{y}^\star \right\} \tag{5}$$

16. Exprimer la puissance p_η dissipée par effet visqueux dans le fluide, par unité de surface de plaque et moyennée sur une période $T = 2\pi/\omega$ d'oscillation. Vérifier qu'elle est égale à p_{op}. Préciser la conséquence directe de cette dissipation.

2 Cisaillement en géométrie cylindrique.

Nous considérons une bouteille ayant la forme générale d'un cylindre de rayon $R\,(R = 5\,\mathrm{cm})$ et de longueur L, remplie totalement d'un fluide (de l'eau), en mouvement de rotation ou de rotation et de translation, comme le représente la figure (2).

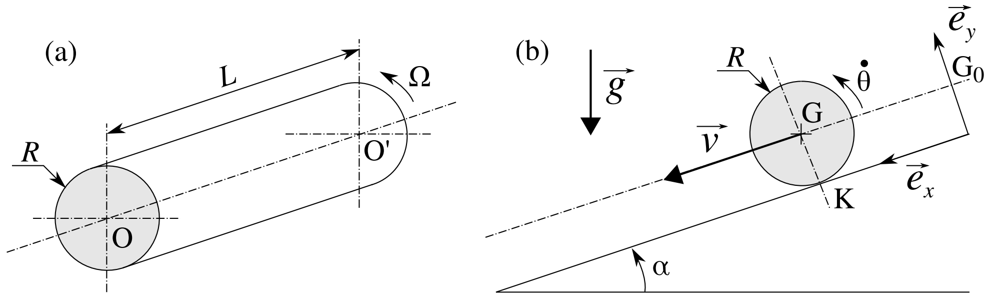

FIGURE 2 – (a) Cylindre horizontal creux, rempli d'eau, en rotation autour de son axe (OO'). (b) Cylindre en mouvement de roulement sans glissement le long d'un plan incliné, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.

- **Bouteille en rotation uniforme.**

La bouteille cylindrique (R, L) est en rotation autour de son axe, horizontal et fixe (figure (2)-(a)). Nous supposons que le champ de vitesse $\vec{v}(\mathrm{M},t)$ du fluide (de l'eau) qu'elle contient est purement orthoradial et qu'il est uniquement fonction de la distance r du point M à l'axe du cylindre, et du temps t, soit :

$$\vec{v}(\mathrm{M},t) = v(r,t)\,\vec{e}_\theta \tag{6}$$

17. À l'instant $t = 0$, la bouteille est mise en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire Ω maintenue ensuite constante. Donner l'expression de la vitesse du fluide $v^\infty = v^\infty(r)$ dans le régime permanent.

18. Définir et exprimer le temps caractéristique τ nécessaire à l'établissement du régime permanent. Calculer sa valeur numérique.

19. Sans calcul, représenter le profil radial du champ de vitesse pour $t \sim \tau/10$.

20. Au temps t $(t < \tau)$, exprimer l'épaisseur caractéristique $\delta(t)$ de fluide mis en mouvement. Calculer sa valeur pour $t = 10\,\mathrm{s}$.

- **Bouteille roulant sur un plan incliné.**

Le but de cette dernière partie est d'étudier le mouvement d'une bouteille (R, L) roulant le long d'un plan incliné, d'angle d'inclinaison $\alpha\,(\alpha = 10^\circ)$, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ (figure (2)-(b)). Nous notons $\overrightarrow{\mathrm{G_0G}} = x\,\vec{e}_x$. On négligera tout effet dissipatif.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au roulement sans glissement d'un cylindre homogène rigide (un bloc cylindrique) de rayon R, de longueur L, de masse M et de moment d'inertie $I = MR^2/2$ autour de l'axe passant par son centre de gravité G. Le cylindre, initialement au repos, est lâché à l'instant $t = 0$. Nous notons $\vec{v} = v(t)\,\vec{e}_x$ la vitesse de son centre de gavité.

21. Exprimer l'énergie cinétique (totale) W_c du cylindre en fonction de M et v.

22. Justifier que l'énergie mécanique du cylindre dans le champ de pesanteur est une grandeur conservée bien que le coefficient de frottement entre le plan et le cylindre ne soit pas nul.

23. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v.

24. Représenter graphiquement l'évolution temporelle de la vitesse du cylindre.

25. Établir à quelle condition le roulement du cylindre sur le plan s'effectue effectivement sans glissement, comme nous l'avons supposé *a priori*. Nous notons f le coefficient de frottement cylindre–plan et introduisons le rapport $k \equiv I/(MR^2)$.

26. Indiquer quelle hypothèse deviendrait irréaliste au bout d'un certain temps.

27. Nous notons a la longueur du plan incliné. Exprimer le temps de parcours Δt du cylindre sur ce plan. Donner sa valeur numérique pour $a = 1\,\text{m}$.

28. Préciser pourquoi, fondamentalement, ce résultat ne depend pas de la masse du cylindre.

29. On lâche, au même instant, sur le plan incliné un cylindre plein et un cylindre creux (rigides). Indiquer, en le justifiant, lequel atteint en premier l'extrémité du plan.

- Nous considérons enfin une bouteille remplie d'eau.

30. En s'appuyant sur les résultats établis dans la partie consacrée à l'étude du mouvement d'un fluide dans une bouteille en rotation uniforme, décrire le mouvement de l'eau lorsque la bouteille parcourt le plan incliné.

31. La bouteille remplie d'eau arrivera-t-elle à l'extrémité du plan avant ou après une bouteille vide ? Une argumenation claire et détaillée est attendue.

⋆ ⋆ ⋆