ÉCOLE POLYTECHNIQUE **CONCOURS D'ADMISSION 2018**
ENS : CACHAN, LYON, RENNES

Composition de Mathématiques A, Filière MP (XLCR)

1. Présentation du sujet

Ce sujet étudiait la géométrie de l'ensemble des matrices réelles de taille et de rang fixés et faisait la part belle à l'algèbre linéaire. Ainsi, la dernière question du sujet décrivait l'espace tangent à cet ensemble en n'importe lequel de ses points. Il est à noter que les matrices considérées étaient rectangulaires et pas seulement carrées. Ce point essentiel a parfois été malheureusement occulté par les candidats.

Trois questions préliminaires permettaient de démontrer la sous-multiplicativité de la norme de Frobenius sur l'espace des matrices. Dans la première partie on écrivait toute matrice de rang k comme le produit de trois matrices ; la matrice centrale de ce produit étant carrée diagonale à valeurs propres strictement positives, les vecteurs colonnes des deux autres, qui sont rectangulaires, formant une famille orthonormée.

Cette écriture est appelée décomposition en valeurs singulières dans la littérature. Dans la deuxième partie, on fixe une matrice A de rang k et un entier $l < k$. Sous une hypothèse de généricité sur les valeurs singulières de A, on construisait alors une boule ouverte centrée en A, de rayon explicite et incluse dans l'ensemble des matrices de rang supérieur à $l+1$. On décrivait aussi le cas limite : les matrices de rang l sur la sphère correspondante. Dans la troisième par-tie, on se donnait un sous-espace vectoriel F de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de dimension k et muni d'une base orthonormée. On étudiait l'application qui à une famille de $n-k$ vecteurs associe la projection sur F parallèlement à l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs. Après en avoir obtenu une description explicite sur un ouvert, on montre la continuité de cette application. Dans la quatrième et dernière partie, nous décrivions l'espace tangent sus-cité ainsi que son orthogonal.

2. Commentaires généraux

Dans ce sujet, les matrices à coefficients réels, n lignes et p colonnes étaient principalement pensées comme des familles de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Sa résolution nécessitait dès le début la mise en oeuvre de techniques de calcul matriciel (expression des coefficients d'un produit, produit par blocs, manipulation de la trace, de la transposée...) et les outils du chapitre sur les espaces euclidiens (inégalité de Cauchy-Schwarz, théorème de réduction des matrices symétriques, caractérisation des projections orthogonales, théorème de Pythagore, inégalité de Bessel ...). Quelques questions mettaient aussi en oeuvre de la topologie (principalement la notion de continuité) et même de la géométrie à travers la notion d'espace tangent.

De nombreuses questions laissaient une certaine liberté aux candidats. Par exemple, pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires, il suffit de montrer deux des trois propriétés sur la dimension, la somme et l'intersection. Pour montrer qu'une matrice est inversible, on peut calculer son déterminant, son rang, son noyau ou bien son image. Savoir choisir entre ces stratégies est une attente importante du concours.

La notion de projecteur a aussi posé des difficultés inattendues. Par exemple, le fait que la projection sur F parallèlement à G est la seule application linéaire valant l'identité sur F et s'annulant sur G est largement sous-exploité. De même, le fait qu'une projection est orthogonale si et seulement si sa matrice, dans une base orthonormée, est symétrique ne semble pas connu de tous les candidats.

Le fait que ce sujet traitait de matrices rectangulaires a posé des problèmes à de nombreux candidats.

Nous rappelons par ailleurs que les recommandations contenues dans les rapports antérieurs restent souvent pertinentes d'une année sur l'autre.

En particulier, nous insistons à nouveau sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que d'une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). En particulier, lors de l'enchainement d'égalités ou d'inégalités, il est important de mettre en évidence les éléments clés de justification. Par exemple, nous déplorons que la majorité des candidats multiplient une inégalité par un scalaire sans prendre soin de vérifier s'il est positif. Nous déplorons aussi un manque de soin général, ou de justification, dans certaines copies, pouvant se révéler préjudiciable.

Les questions étaient, comme toujours, de difficulté et de longueur variables. La deuxième partie du problème était de loin la plus ardue. La quatrième partie n'était pas si difficile pour les candidats ayant absorbé les notations introduites.

Rappelons enfin que la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté : ainsi, cibler uniquement les questions les plus élémentaires en espérant cumuler suffisamment de points est une stratégie ne pouvant évidemment mener à l'obtention d'une bonne note. De même, tenter de traiter un maximum de questions sans rédiger correctement une réponse complète ne peut donner lieu non plus à de bons résultats : bien que la gestion du temps fasse partie des difficultés de l'épreuve, il est nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	143	9,53 %
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	499	33,27 %
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	533	35,53 %
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	237	15,80 %
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	88	5,87 %
Total	1500	100 %
Nombre de candidats : 1500		
Note moyenne : 8,97		
Écart-type : 4,01		

3. Examen détaillé des questions

1) Ce calcul matriciel élémentaire a été bien réalisé dans la majorité des copies.

2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique était le point clé.

3) Deux solutions étaient possibles. La première utilisait la question 2) pour chaque colonne de C. La seconde réutilisait l'inégalité de Cauchy-Schwarz et nécessitait des manipulations soignées des sommes. La majorité des candidats a préféré la seconde approche.

4) La question était facile. La plupart des candidats utilisaient des résultats avancés du cours (comme l'expression du rang à l'aide des mineurs extraits). Les solutions « économiques » n'utilisant que le fait que p vecteurs engendrent un espace de dimension au plus p et qu'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est de dimension inférieure à n étaient préférables.

5a) Pour conclure que $\lambda \geq 0$ sachant que $\lambda \|v\|^2 \geq 0$ il est nécessaire que v soit non nul : cela doit apparaitre clairement sur les copies. L'égalité entre les rangs de A et de S n'a été correctement justifiée que sur un quart des copies.

5b) Un vecteur propre est par définition non nul !

6a) La plupart des candidats ont vu qu'il s'agissait d'appliquer le théorème spectral. Le calcul par blocs, utile pour évincer les valeurs propres nulles, a été plus discriminant.

6b) Une des questions permettant plusieurs approches.

6c) et 7) Ces deux questions utilisaient l'identité $UU^TA = A$ qu'il fallait justifier à l'aide de la question 6b. En effet, U^TU est la matrice identité mais comme U est rectangulaire, UU^T n'est pas la matrice identité et U^T n'est pas un inverse de U.

8a) Une application du théorème de Pythagore pas toujours vue. La justification de l'orthogonalité nécessaire a été satisfaisante dans l'ensemble.

8b) Un calcul matriciel plutôt long dont il s'agissait de justifier chaque étape.

9a) et 9b) L'inégalité de Bessel et la condition d'égalité étaient les points clés et n'ont été vus que par les meilleures copies.

9c) Question traitée dans de rares copies.

10a) Le plus simple était sans doute de calculer le noyau de $M_{V,W}$. De nombreux candidats ont essayé, sans succès, d'exhiber l'inverse. D'autres de calculer le déterminant de $M_{V,W}$ en utilisant, à mauvais escient la formule de déterminant par blocs.

10b) Plusieurs solutions possibles. Question bien traitée dans l'ensemble.

10c) Le calcul de $P^2_{V,W}$ était inutile : il suffisait de déterminer les restrictions de $P_{V,W}$ sur $\mathrm{Im}(V)$ et $\mathrm{Im}(W)^{\perp}$.

11) Une question de cours bien traitée dans l'ensemble.

12) Le point clé, la continuité de l'application $W \longmapsto W^T V$ n'a été vu que dans de bien trop rares copies.

13a) La *semi*-continuité du rang n'est pas comprise de l'immense majorité des candidats.

13b) Il s'agissait d'utiliser les propriétés des applications injectives et surjectives au regard de la composition. Ceci n'a été fait que dans de très très rares copies.

13c) Question bien traitée dans l'ensemble.

14a) Le calcul de la dimension de T_A était difficile et n'a été traité correctement, là encore, que de façon exceptionnelle.

14b) Peu traitée car utilisait la 14a.

15 à 19) Compte tenu de la longueur du sujet, ces questions n'ont été tentées que par une infime proportion des candidats et la plupart du temps par des candidats ayant fait l'impasse sur nombre de questions précédentes. Même si certaines étaient facilement abordables, elles nécessitaient une bonne compréhension des résultats précédents ainsi que des notations utilisées et donc un certain recul par rapport au sujet, ce qui a fait défaut à la quasi totalité des candidats ayant essayé la résolution de ces questions.