Banque MP inter-ENS – Session 2018
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS de Cachan, ENS de Lyon, ENS de Paris, ENS de Rennes

- **Coefficients (en % du total concours) :**
  — Paris-Saclay : MPI 9,6 % ; Info 13,2 %
  — Lyon : MPI 10,8 % ; Info/M 12,7 %
  — Paris : MPI/MP 3,7 % ; Info 13,3 %
  — Rennes : MPI 9,6 % ; Info 11,4 %

- **Membres du jury :**
  Michel Bonnefont, Roland Diel, Yohann Le Floch, Christophe Poquet et Christophe Prange

---

L'épreuve de mathématiques C 2018 avait pour thème les processus de Markov, discrets dans la première partie de l'épreuve puis continus dans la seconde et le problème de la convergence vers la probabilité invariante. Ce sujet a permis de tester les candidats sur leur aisance à manipuler les techniques et les outils classiques d'analyse au programme des classes préparatoires aux grandes écoles.

Les notes se sont étalées de 0,1 à 20 avec une moyenne de 9,45 et un écart type de 3,84. De manière générale, le jury a récompensé la précision et la concision dans la rédaction ainsi que l'honnêteté des candidats. A l'inverse, les candidats ayant cherché à imposer leurs résultats à l'aide d'affirmations arbitraires ou d'arguments imprécis, ont été sanctionnés. Le sujet était très long et il n'était pas envisageable de le traiter dans son intégralité dans le temps imparti. Répondre correctement aux questions de la première partie garantissait déjà une excellente note. Au contraire, les candidats ayant pris le parti d'éviter toute difficulté en traitant uniquement les questions les plus simples du sujet n'ont pas été récompensés.

Il est rappelé aux candidats que la présentation entre pour une part importante dans l'appréciation d'une copie. En particulier, les abréviations sont à proscrire et les résultats obtenus doivent être mis en évidence. De même, les candidats ne doivent pas hésiter à décrire les étapes de leurs raisonnements à l'aide de phrases, sans toutefois alourdir excessivement la rédaction. Il est également dans leur intérêt de bien faire apparaître les différentes étapes de leurs calculs et leurs justifications.

1 Partie I

Le but de cette première partie était de se familiariser avec les matrices de transition, notamment dans le cas dénombrable et d'étudier la convergence vers la loi invariante.

Les premières questions n'étaient pas difficiles, mais demandaient toutefois une justification rigoureuse des diverses interversions de séries. Le soin apporté à la rédaction donnait bien souvent le ton de la suite de la copie et il y avait tout à gagner à proposer une réponse claire, argumentée et concise.

Plus précisément, dans les questions 1.1, on attendait un recours au théorème de sommation par paquets pour les familles sommables à termes positifs. L'utilisation du théorème de Fubini-Tonelli était également possible ; mais il était essentiel de mentionner que les calculs se faisaient dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Une (fausse) justification du type « les sommes peuvent être interverties car E est fini ou dénombrable » est malheureusement apparue dans un nombre non négligeable de copies et a été sanctionnée. Une justification propre en 1.1.a autorisait une rédaction plus concise dans les questions 1.1.b et 1.2.a. Toutefois, il fallait bien mettre en évidence en 1.2.b que l'on n'était plus dans le cas positif ; cela n'a pas été fait dans de nombreuses copies. La sommabilité devait alors être vérifiée, sans oublier les valeurs absolues. Les questions 1.1 et 1.2 ne comportaient autrement aucune difficulté calculatoire.

Les questions 1.3 faisaient intervenir des notions élémentaires de théorie des probabilités. Elles ont rarement été bien traitées. Notons que suivre l'ordre des questions proposé par le sujet n'était pas obligatoire mais restait néanmoins le moyen le plus simple de démontrer proprement les propriétés désirées. Dans la question 1.3.a, le jury attendait une réponse claire et complètement argumentée faisant apparaître les notions d'indépendance et d'identique distribution aux bons endroits et dans le bon ordre. À ce titre, les raisonnements constitués d'un enchaînement de formules sans aucune justification ne pouvaient en aucun cas rapporter tous les points. Et il n'était pas acceptable d'affirmer sans justification l'égalité

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \ .$$

Les copies prétendant que les X_i étaient mutuellement indépendantes ont évidemment été lourdement sanctionnées. Enfin, des démonstrations utilisant les probabilités conditionnelles sont trop souvent apparues sans justification de leur existence (probabilité non nulle de l'évènement par lequel on conditionne). Les questions 1.3.c et 1.3.d ont été rarement traitées rigoureusement et ont trop souvent donné lieu à de vagues explications sur le fait que X_{n+1} dépendait uniquement de X_n et non de $X_0, \ldots, X_{n-1}$. Enfin, la question 1.3.e découlait facilement des questions précédentes, mais la fin du calcul requérait une justification, soit en invoquant la question 1.2.b, soit en justifiant à nouveau l'interversion des sommes.

La question 1.4 ne posait aucun problème et a été traitée dans quasiment toutes les copies.

La question 1.5.a consistait en une récurrence sans difficulté ; certaines copies ont néanmoins oublié que $P^n(x, y)$ était défini de manière similaire au produit matriciel et non comme un produit de nombres réels. La suite de la question 1.5, très détaillée, ne posait pas de problème particulier. Cependant, dans certaines copies, une mauvaise compréhension de l'énoncé faisait croire aux candidats en l'existence d'un entier n tel que pour tout $x \in E$, $P^n(a, x) > 0$.

La question 1.6 a été plus discriminante. Dans la question 1.6.a, le jury attendait une justification de la sommabilité des différents termes et des interversions réalisées au cours de la démonstration, ainsi qu'une explication claire pour chaque étape non triviale (par exemple tout passage utilisant la réversibilité). La question 1.6.c comportait une erreur regrettable : l'hypothèse que, dans cette question, l'espace d'état E était supposé fini a été omise. En effet l'utilisation de la question précédente nécessitait que f soit bornée ; cela ne pouvait se montrer dans le cadre général avec les outils à disposition d'un étudiant de CPGE. Néanmoins, rares sont les copies ayant relevé le problème. Toutes les copies qui rappelaient l'importance du caractère borné de la fonction f pour pouvoir conclure ont été récompensées.

Les questions 1.7.a et 1.7.b ont été en général bien traitées par les copies les ayant abordées. Dans la question 1.7.c, il fallait penser à rappeler l'irréductibilité et la réversibilité de P^2 par rapport à π pour pouvoir invoquer la question 1.6.b.

Les questions 1.8.a et 1.8.b ne présentaient pas de difficultés et ont été bien traitées dans de nombreuses copies. Dans la question 1.8.b, il ne fallait pas oublier de montrer, au moins de manière succincte, que $f \to Pf$ était un endomorphisme, et la mise en évidence de la réversibilité était attendue pour son caractère symétrique. La question 1.8.c a donné lieu à bon nombre de justifications farfelues pour montrer que λ était réel, alors qu'il s'agissait uniquement de citer le théorème spectral. La démonstration du fait que $|\lambda| \leq 1$ a été globalement bien faite ; par contre, le fait que $\lambda \neq -1$, qui découlait de la question 1.7.c, a souvent été négligé, sans doute par inattention. La question 1.8.d ne présentait pas de difficulté particulière, il fallait toutefois penser à utiliser le résultat de la question 1.6.b. Les questions 1.8.e et 1.8.f demandaient plus de recul. Elles ont été particulièrement discriminantes et ont permis aux bonnes copies de se démarquer. Pour la question 1.8.e, il fallait penser à diagonaliser P dans une base orthonormée pour $< \cdot, \cdot >_\pi$ et à décomposer f dans cette base. Pour la question 1.8.f, on ne pouvait utiliser l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^d$. Il fallait utiliser la question précédente avec un choix judicieux pour la fonction f, par exemple $f(y) = \mathbf{1}_{y=x}$.

2 Partie II-A

La partie II-A étudiait quelques propriétés du noyau gaussien. C'était l'occasion de tester la maîtrise du théorème de convergence dominée et des théorèmes de continuité et dérivation pour les intégrales à paramètres. Les majorations nécessaires étaient souvent assez fines et ont rarement été obtenues.

La question 2.1 a été correctement traitée dans l'ensemble. Dans la question 2.2, le jury attendait que l'existence de $\gamma_s * \gamma_t$ soit démontrée. Le calcul n'était pas aisé, et très peu de candidats l'ont mené à bien. Il est à noter que certaines copies ont essayé d'aboutir au résultat par le biais d'une équation différentielle vérifiée par les deux membres de l'égalité. Ce raisonnement n'était toutefois pas vraiment plus simple que le calcul direct et requérait la vérification de la dérivabilité.

La question 2.3, très simple, a été bien traitée par les copies l'ayant abordée. Dans la question 2.4, le changement de variable proposé par l'énoncé a été très rarement utilisé alors qu'il simplifiait grandement les choses pour utiliser le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres. Pour la question 2.4.a, montrer la continuité sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ ne suffisait pas. Enfin, on attendait que l'existence de $P_t f$ soit établie.

La question 2.5 était plus discriminante. Il était possible de démontrer directement le résultat par récurrence, mais il fallait alors faire attention à ne pas dériver les inégalités. Il était également possible de montrer d'abord que $\frac{d^n}{dx^n}\gamma_t(x) = t^{-n/2}P_n(x/\sqrt{t})\gamma_t(x)$ où P_n est un polynôme de degré n, le résultat de la question s'obtenant ensuite simplement.

La question 2.6.a consistait à utiliser le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres en majorant $\frac{d^n}{dx^n}\gamma_t$ grâce à la question précédente. Si un certain nombre de copies ont bien envisagé cette démarche, obtenir une majoration correcte demandait une certaine finesse de calcul et cela a rarement été effectué proprement. Les questions 2.6.b et 2.6.c découlaient directement des résultats obtenus en 2.6.a et ne présentaient pas de difficultés particulières.

3 Partie II-B

La partie II-B s'intéressait aux propriétés de concentration du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Elle a été abordée par très peu de candidats. Bien souvent, ceux-ci n'ont tenté que de grapiller des points en répondant aux questions faciles sans vraiment essayer de rentrer dans le problème. Le jury tient à rappeler que cette stratégie est peu efficace. S'il était envisageable d'attaquer le sujet par la partie II, il n'y avait aucun intérêt à aborder uniquement les questions faciles et il était bien plus rentable en terme de points obtenus de traiter correctement quelques questions complexes au fil du sujet que de s'éparpiller de cette manière.

⋆ ⋆
⋆