Rapport sur l'épreuve « Mathématiques D », ENS, filière MPI (2018)

Laurent Berger et Sandra Rozensztajn (concepteurs) ;
Alexandre Afgoustidis, Danielle Gondard, Quentin Guignard,
Diego Izquierdo, Adrien Sauvaget (correcteurs).

Présentation du problème

L'épreuve de six heures de la session 2018 avait pour thème l'approximation uniforme de fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par des polynômes à coefficients entiers. Ce problème n'admet de solution non triviale que si la longueur de l'intervalle est suffisamment petite : on établit dans la partie **3** que si a et b sont deux réels vérifiant $b - a \geq 4$, alors les seules fonctions continues sur $[a, b]$ pouvant être approchées uniformément par des polynômes à coefficients entiers sont elles-mêmes polynomiales à coefficients entiers. Ce résultat est dû à S. Kakeya (1914).

Sur un intervalle I de longueur inférieure ou égale à 4, on décrit dans la partie **4** un ensemble fini $J(I)$ ayant la propriété suivante : une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ peut être approchée uniformément par des polynômes à coefficients entiers si et seulement si ses valeurs sur $J(I)$ coïncident avec celles d'un polynôme à coefficients entiers. Lorsque $I = [-a, a]$ avec $a \leq 1$, on a $J(I) = I \cap \mathbb{Z}$: ceci est dû à S. Kakeya et J. Pàl (1914) et est établi en **4.12**. Dans le cas général, on dispose d'au moins deux descriptions de $J(I)$, dues à E. Hewitt et H. Zuckerman (1959). L'une est analytique (comme ensemble des zéros communs à tous les polynômes à coefficients entiers dont la restriction à I est à valeurs dans $]-1, 1[$) et fait l'objet de la partie **4**. L'autre est plus algébrique : on montre dans les parties **6** et **7** que $J(I)$ est exactement l'ensemble des éléments de I qui sont des entiers algébriques dont tous les conjugués appartiennent à I.

Un corrigé de l'épreuve, avec références bibliographiques, paraîtra prochainement dans la Revue de Mathématiques Spéciales.

Résultats de l'épreuve et remarques sur la notation

Nous avons reçu 1083 copies. Les notes attribuées se répartissent comme suit :

Plage de note	Copies	Proportion
$[0, 4[$	370	34,2%
$[4, 8[$	439	40,5%
$[8, 12[$	149	13,8%
$[12, 16[$	89	8,2%
$[16, 20]$	36	3,3%

Moyenne	6,2
Médiane	5,3
Étendue	de 0,1 à 20

- L'épreuve était très longue. Dans la grande majorité des copies, les questions traitées se trouvent dans les trois premières parties et au tout début des parties **4**, **5** et **6**. La partie **7** n'a été abordée de manière significative que dans deux copies. Une copie a réussi le tour de force de traiter correctement la quasi-totalité de l'épreuve, mais ce n'était naturellement pas nécessaire pour obtenir une excellente note.

- Les questions les plus difficiles ou demandant beaucoup de persévérance rapportaient bien sûr nettement plus que les questions les plus faciles. Le « grappillage » n'était donc pas profitable. Volontairement ou involontairement, beaucoup de copies ont semblé y céder à partir de la partie **3**, sautant d'une partie à l'autre en ne traitant que les questions les plus abordables ; ce n'était pas une bonne stratégie. Il ne faudrait pas croire pour autant que réussir une unique question difficile suffisait à garantir l'admissibilité : celles et ceux qui ont négligé les questions les plus abordables n'ont en général pas bien réussi l'épreuve.
- Traiter parfaitement les parties **1** et **2** (y compris les difficiles questions **2.4** et **2.8**) permettait d'obtenir 11,5 ; en allant jusqu'à la fin de la partie **3**, on pouvait obtenir 15,5.
- Le sujet comportait plusieurs questions classiques, visiblement connues d'un certain nombre de candidats : suites sous-additives en **2.2**, théorème de Cesàro en **2.7**, polynômes de Tchebychev en **3.1** et **3.2**, multiplicativité du contenu en **6.2**. Cependant, aucune de ces questions n'apportait un grand nombre de points.

Remarques générales sur les copies

- Les arguments attendus des candidats s'appuyaient essentiellement sur des connaissances de base (analyse réelle et continuité, arguments de compacité en dimension finie, propriétés du déterminant, interpolation de Lagrange ; la partie **6** faisait appel à quelques résultats sur la division euclidienne des polynômes). Les candidats ont globalement montré une bonne maîtrise de ces notions du programme et écrit peu d'horreurs : sauf aux questions **3.2** et **6.2**, le jury n'a pas identifié de thème sur lequel les candidats semblaient montrer collectivement des lacunes.
- La précision de la rédaction était évidemment essentielle : on ne peut réussir une épreuve de mathématiques si les arguments avancés sont trop peu précis pour être vérifiables. Dire « il suffit d'appliquer la définition de la continuité » ou « c'est le théorème de Lagrange » ne peut être considéré comme une démonstration.
- Compte tenu de la longueur de l'épreuve, une certaine concision s'imposait cependant. L'excès de détail n'était pas le défaut le plus courant des copies que nous avons lues, mais certains ayant détaillé à l'extrême leurs réponses aux questions faciles du début de l'épreuve n'ont pas pu aller suffisamment loin pour obtenir une bonne note.
- D'assez nombreuses copies parviennent à un excellent équilibre entre les deux impératifs ci-dessus ; l'efficacité des meilleures copies est tout à fait impressionnante.
- Quelques rares candidats s'arrêtent net après avoir traité de façon très satisfaisante la partie **1** et le début de la partie **2**. Il est difficile d'échapper à l'impression que ces candidats très sérieux ont pris peur en ne réussissant pas l'une des premières questions difficiles du sujet. Ne pas traiter une question difficile, même en début d'épreuve, n'est absolument pas dramatique : cette année, c'était le cas de plusieurs des toutes meilleures copies.

Partie 1

Une proportion significative des copies a très bien traité cette première partie (15 à 20% des copies obtiennent presque tous les points).

1.1. Cette question a généralement été traitée avec soin ; presque tous les candidats donnent un argument complet pour vérifier que C est compact et n'oublient ni la continuité de l'application $p \mapsto \|f-p\|_I$, ni le rappel du fait que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.

1.2. Cette question a été bien traitée dans la grande majorité des copies, bien qu'elle ait donné lieu à quelques erreurs embarrassantes (comme affirmer que si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes et si $(\|f-p_n\|_I)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers m, alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers un polynôme p vérifiant $\|f-p\|_I = m$).

1.3. La grande majorité des candidats voit qu'il suffit de choisir un polynôme d'interpolation de Lagrange. À ce stade du sujet, tout en restant concis, il n'était pas superflu d'indiquer un exemple explicite et de préciser pourquoi son degré est inférieur ou égal à n. Utiliser un argument d'algèbre linéaire, en remarquant que l'application $q \mapsto (q(x_1), \ldots, q(x_n))$ définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$, était naturellement tout aussi bienvenu.

1.4. Cette manipulation simple des notions de base sur la continuité (ou, pour celles et ceux ayant choisi de l'utiliser, la continuité uniforme) a été le plus souvent faite avec soin et succès. Mais une proportion non négligeable de copies commet les erreurs les plus affreuses (inversion de quantificateurs notamment).

1.5. Il suffisait de majorations simples ici et cette question est presque toujours réussie. Quelques candidats ont cependant perdu une bonne occasion de faire preuve de soin dans la rédaction de raisonnements simples.

1.6. À cette question, moins facile que les précédentes, environ un tiers des copies donne une solution à peu près satisfaisante. Beaucoup de candidats comprennent qu'il suffit de choisir $\varepsilon = m$ puis de choisir t assez petit pour que le second majorant de la question précédente soit strictement inférieur à m. Mais l'inégalité stricte $\sup_{y\in I\setminus U_\delta} |f(y)-p(y)| < m$ n'est pas toujours correctement justifiée : un nombre surprenant de copies pense que cela découle du fait qu'on a $|f(y)-p(y)| < m$ pour tout y de $I \setminus U_\delta$. Par ailleurs, beaucoup de candidats proposent un t explicite en divisant par ℓ, mais ne se demandent pas si ℓ peut être nul.

1.7. Cette question, lorsqu'elle est traitée, l'est souvent correctement — comme la précédente, c'est le cas dans environ un tiers des copies. Avant d'appliquer la question **1.6** à $\frac{p_1+p_2}{2}$, il ne fallait pas oublier de vérifier l'égalité $\left\|f - \frac{p_1+p_2}{2}\right\|_I = m$.

Partie 2

Cette partie est abordée dans la grande majorité des copies, mais est très inégalement traitée. Elle a donc été particulièrement discriminante. Les questions **2.4** et **2.8**, qui étaient difficiles, ont reçu d'assez nombreuses réponses correctes et originales.

2.1. La partie « existence » de la question est correctement traitée par beaucoup. Le fait que K soit infini garantissait que $\|\cdot\|_K$ soit une norme : celles et ceux qui ont pensé à le mentionner avant d'appliquer des résultats de topologie relatifs à la nome $\|\cdot\|_K$ ont été récompensés.

Dans la grande majorité des cas, l'unicité a par contre été très mal comprise : il ne suffisait pas d'appliquer le résultat de la partie **1** à la fonction nulle.

2.2. Cette question classique était à l'évidence déjà connue d'un grand nombre de candidats, qui ont transcrit sans peine une solution efficace. Si l'on ne connaissait pas ce résultat, la question n'avait rien de trivial : quelques copies présentant une solution originale et visiblement improvisée, nous avons veillé à ce que le barème ne leur soit pas défavorable.

2.3. Il suffisait ici d'appliquer le résultat de la question précédente en posant $\ell_n = \ln(t_n)/n$ pour tout n de $\mathbb{N}^\star$ − cela a très souvent été utilisé, mais il fallait penser à vérifier que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement positive.

2.4. Il s'agissait de la première question vraiment délicate du sujet ; nous avons lu beaucoup de solutions justes, très variées (une cinquantaine environ). Il faut saluer les efforts et l'imagination déployés par celles et ceux qui ont relevé le défi.

2.5. Cette question ne présentait pas de difficulté particulière et a en général été réussie lorsqu'elle était abordée.

2.6. La grande majorité des copies comprend bien la question, remarque que l'on peut remplacer p par X^n sans changer le déterminant qui intervient dans la question, et reconnaît un déterminant de Vandermonde. Certains candidats ont malheureusement perdu beaucoup de temps en démontrant en détail la formule classique (et au programme) pour un tel déterminant.

2.7. Le théorème de Cesàro est correctement restitué dans la quasi-totalité des copies.

2.8. Cette question difficile, comme **2.4**, a reçu environ cinquante réponses satisfaisantes (pas forcément dans les mêmes copies), qui témoignaient souvent d'une grande maîtrise technique et d'une créativité certaine.

Partie 3

Les questions de cette partie n'étaient pas très difficiles, mais demandaient du soin. Nous avons observé une certaine négligence de la part de beaucoup de candidats à ce stade de l'épreuve (notamment aux deux premières questions, pourtant simples). La plupart des candidats abordent les questions **3.1** à **3.3** : celles et ceux qui ont bâclé leurs réponses à ces questions y ont perdu de précieux points. La suite est traitée correctement dans environ un cinquième des copies.

3.1. Ce grand classique a été très souvent traité. Mais beaucoup de copies ont proposé une rédaction très approximative : raisonnements par récurrence prenant pour acquise l'existence à montrer (« donc $T_{n+1}(X) = ...$ »), unicité bâclée (sans mentionner que $\cos(\mathbb{R})$ est infini), affirmation du fait que T_n est de degré n sans justification ni mention du coefficient de X^n... Ces négligences ont été sanctionnées. Bien sûr, de nombreuses copies donnent un argument entièrement clair et sans longueurs inutiles.

3.2. Le coefficient dominant de T_n est souvent déterminé correctement. Mais l'existence de $(n+1)$ extrema distincts donne lieu à plusieurs erreurs embarrassantes pour les nombreux candidats concernés : recherche des zéros de la dérivée (condition nécessaire d'extremum) sans vérifier que les points trouvés sont effectivement des extrema, confusion entre les nombres $\cos(\frac{2k\pi}{n})$ et $\frac{2k\pi}{n}$...

3.3. Ici encore, la question n'était pas bien difficile et beaucoup de candidats ont compris sans peine la situation, mais certains ont bâclé leurs réponses (en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires n fois sans préciser les intervalles considérés ni mentionner la continuité de la fonction, etc). La partie « en déduire », de même, est souvent traitée cavalièrement.

3.4. Cette question a donné lieu à de nombreuses erreurs d'inattention : beaucoup de candidats pensent à se ramener à $[-1, 1]$ par une transformation affine, mais proposent une transformation affine qui ne convient pas, ou oublient de normaliser pour obtenir un polynôme unitaire. Plutôt que de s'appuyer sur les parties « en déduire » de la question pour vérifier leur réponse, quelques copies ont cédé à la tentation de l'entourloupe. La seule déduction de $d_1([a, b])$ à partir de la formule donnée pour $\left\| T_n^{[a,b]} \right\|_{[a,b]}$ rapportait bien sûr très peu.

3.5. Il fallait ici se ramener à un polynôme unitaire en divisant par le coefficient dominant et se rappeler que si $\tilde{p}$ est un polynôme unitaire de degré n, alors $\|\tilde{p}\|_I \geq \left\| T_n^I \right\| \geq 2$. Lorsqu'elle est traitée, cette question l'est en général correctement.

3.6. Sauf pour ce qui concerne le sens trivial, cette question est traitée correctement dans environ 10% des copies. Il s'agissait de voir que si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes à coefficients entiers convergeant vers f, alors pour n et m assez grands, le polynôme $p_n - p_m$ est constant d'après **3.5**.

Partie 4

Cette partie était la plus longue de l'épreuve. Les questions **4.3** et **4.4**, difficiles et techniques, semblent avoir découragé la grande majorité des candidats : peu ont essayé d'aborder la suite de cette partie au-delà des toutes premières questions. Mais celles et ceux qui l'ont fait ont pu montrer leur compréhension d'ensemble du problème, ont fait preuve d'une maîtrise technique certaine et y ont beaucoup gagné.

4.1. Cette question n'a pas posé de problème à celles et ceux qui l'ont abordée en ayant bien compris la partie précédente.

4.2. La plupart des candidats effectuent des divisions euclidiennes successives par le polynôme r ; les rédactions sont variées (du simple « on recommence » à la récurrence extrêmement détaillée). De rares copies utilisent avec profit le fait que la famille des polynômes $X^\alpha r(X)^\beta$, $\alpha = 1, \ldots, (d-1)$, $\beta \in \mathbb{N}$, engendre $\mathbb{R}[X]$.

4.3. Cette question, technique et beaucoup plus délicate qu'il n'y paraissait, n'a été traitée de façon satisfaisante que dans une quinzaine de copies. Il ne suffisait pas d'appliquer le résultat précédent à $p(X)^k$ et de séparer parties entières et fractionnaires des coefficients.

4.4. Cette question était difficile ; elle a reçu cinq réponses satisfaisantes. Une fois choisi ℓ_0 de façon à ce que les normes de $p^{k'} - p^k$ et $r_{k'} - r_k$ soient petites (par exemple $< 1/3$) pour $k' > k \geq \ell_0$, il restait à voir qu'il existe deux entiers $k' > k$ tels que les coefficients de $p_{k'}$ soient très proches de ceux de p_k. C'est ce dernier argument (de compacité, en utilisant le principe des tiroirs ou plusieurs extractions successives dans les m suites à valeurs dans $[0, 1]$ donnant les coefficients des p_k) qui a été très rarement trouvé.

4.5. On a lu beaucoup d'étourderies sur cette question concrète et relativement indépendante des précédentes, notamment de la part de candidats oubliant que 0 pouvait ne pas appartenir à I. Certains candidats « grappilleurs » n'ont traité dans la partie **4** que cette question : cela leur a peu réussi.

4.6. Il suffisait ici de remarquer que deux polynômes à coefficients entiers qui sont suffisamment proches sur I doivent en fait coïncider sur $J(I)$; mais peu de candidats s'étant aventurés dans cette partie, on compte moins de 50 réponses correctes.

4.7. Cette question, où il fallait une certaine habileté pour obtenir un polynôme qui soit à la fois à coefficients entiers et de petite norme, est traitée dans cinq copies.

4.8. On pouvait ici partir d'un polynôme quelconque, appliquer la question **4.2**, séparer partie entière et partie fractionnaire, puis majorer la différence assez brutalement : cela a été fait dans une dizaine de copies.

4.9. Il ne fallait pas oublier de vérifier la continuité de $q^{-k}f$ pour pouvoir appliquer le théorème de Weierstrass. Les copies ayant correctement traité cette question (moins d'une trentaine) ont su utiliser la question **4.8**, sans pour autant y avoir nécessairement répondu.

4.10. Question correctement traitée dans les copies ayant résolu la question **4.9**.

4.11. Conséquence immédiate des questions **4.6** et **4.10**, cette question n'est correctement traitée que dans les copies ayant correctement résolu ces deux questions.

4.12. Question peu difficile, mais traitée dans une quinzaine de copies seulement.

Partie 5

Cette partie, plus algébrique, a été très souvent abordée. Malheureusement, peu de candidats y ont trouvé un réel profit : traiter uniquement les deux premières questions relevait du grappillage et a rapporté très peu de points ; les réponses aux questions **5.3** et **5.4** ont souvent été trop imprécises pour être acceptables.

5.1. Il n'y avait pas de difficulté ici, en tout cas pour celles et ceux qui ont pris le temps de rédiger correctement leur réponse (certaines réponses basées sur une débauche de quantificateurs étaient par contre incompréhensibles).

5.2. Cette question très facile, où il suffisait de remarquer que l'ensemble des n-uplets plus petits que $\underline{i}$ est contenu dans l'ensemble $E = \{0, \ldots, \sum i_k\}^N$, a souvent été bien traitée ; nous avons cependant lu beaucoup de justifications (correctes) reposant sur des disjonctions de cas alambiquées, et un certain nombre de candidats ont donné une valeur fausse pour le cardinal de E.

5.3. Un certain nombre de candidats utilisent à bon escient des transpositions des indices, mais à ce stade de l'épreuve, beaucoup d'autres semblent se décourager et sautent directement à la partie **6**.

5.4. Cette question, d'aspect très simple, a souvent reçu des réponses décevantes où aucun argument n'est donné pour le degré de $S_1^{d_1} \cdots S_n^{d_n}$ et où le flou semble régner.

5.5. Cette question était plus délicate que les précédentes, mais classique : elle a reçu une cinquantaine de réponses relativement précises, et autant d'ébauches imprécises.

Partie 6

Cette partie est commencée dans beaucoup de copies ; peu cependant vont au-delà de **6.3.**

6.1. Question classique, correctement traitée dans un tiers des copies.

6.2. Environ 200 copies traitent cette question, mais seulement la moitié d'entre elles le font correctement. La plupart des solutions correctes utilisent l'indication en se ramenant au préalable au cas $c(a) = c(b) = 1$. Certains candidats avaient manifestement déja vu une démonstration de la multiplicativité du contenu, et ont restitué leur solution avec un succès inégal.

6.3. Les réponses apportées à cette question sont souvent décevantes : c'est l'une des rares où l'on doive signaler une erreur fréquente et une trentaine de copies seulement (sur une centaine l'ayant abordé) présente des solutions correctes. Si la notion de polynôme minimal d'un nombre algébrique était manifestement bien connue de la plupart des candidats ayant abordé cette question, l'intégralité de celui-ci pour un entier algébrique a mené à l'écriture de bien des horreurs : beaucoup de candidats utilisent un argument revenant à affirmer que $\mathbb{Z}[X]$ est principal. Peu de copies (une quinzaine) vérifient correctement que p_x est à racines simples sur $\mathbb{C}$.

6.4. Question peu difficile, en général bien traitée dans la cinquantaine de copies qui l'ont abordée.

6.5. Cette question assez difficile n'a été correctement traitée que dans une dizaine de copies. Dans les copies qui abordent cette question, il est en général entendu que les $(y_i)_i$ se substituent aux variables $(T_i)_i$ de la partie **5**, mais le rôle de la variable X a manifestement perturbé.

6.6. Il était ici nécessaire d'avoir compris la démonstration de la question **6.5**. Quelques copies seulement traitent cette question.

6.7. Il était abordable pour qui avait traité la question **6.5** de résoudre celle-ci en reconnaissant dans $\prod_{i=1}^{k} q(x_i)$ une fonction symétrique des x_i : une dizaine de candidats l'ont vu.

6.8. La perspective d'effectuer une étude de fonction possiblement chronophage (pour justifier que le polynôme $p(X) = X(X^2 - 1)(X^2 - 2)$ vérifie $\|p\|_{[-a,a]} < 1$ dès que $a \leq 3/2$) a manifestement découragé la dizaine de candidats qui sont arrivés jusqu'ici. Cette question n'est correctement traitée que dans deux copies.

Partie 7

Cette partie a été extrêmement peu abordée. Cinq copies ont traité la question **7.1** ; parmi elles, l'une est allée jusqu'à **7.3**, une autre est allée jusqu'à la fin du problème.

7.1. Cette question redoutable a été résolue par cinq personnes.

7.2. Cette manipulation d'algèbre linéaire demandait un peu de soin, puisque ce n'est pas tout à fait au pavé $f^{-1}(B_r)$ qu'il fallait appliquer le résultat de la question précédente.

7.3. Il s'agissait d'une application immédiate de la question précédente et de la partie **6** : cette question a rapporté très peu aux quelques candidats s'étant livrés au « grappillage ».

7.4 - 7.7. Les dernières questions du problèmes, difficiles, ont été abordées (et résolues) dans une seule copie. Elles nécessitaient du recul sur l'ensemble du problème, notamment d'adapter au contexte de la partie **7** certaines des démonstrations de la fin de la partie **4** et d'utiliser les idées et résultats de la partie **6**.