Rapport sur l'épreuve orale spécifique du concours 1^{ère} année des Écoles Normales Supérieures de Paris Saclay et de Rennes

N. Aguillon, P.-A. Guihéneuf, L. Ménard

L'épreuve d'oral spécifique des ENS de Paris-Saclay et de Rennes dure 45 minutes. Il s'agit d'un oral sans préparation, constitué d'un exercice qui commence par une question simple ou proche du cours et comporte la plupart du temps plusieurs questions intermédiaires. À l'abord d'une nouvelle question, l'examinateur laisse au candidat.e le temps de creuser une piste et de réfléchir, puis rapidement une discussion s'engage avec le jury. Selon les situations, cette discussion peut prendre plusieurs formes : l'examinateur peut demander des éclaircissements ou des corrections mineures sur la preuve proposée, une synthèse de l'idée de preuve ou au contraire, réclamer une rédaction précise et rigoureuse des arguments précédemment fournis par le candidat. Il est également fréquent que le jury propose une piste plus précise à la personne interrogée, après lui avoir laissé quelques moments de réflexion sur une question difficile.

Le jury s'accorde à dire que l'ensemble des candidats est de bon niveau, avec une connaissance approfondie du cours, de nombreux réflexes mathématiques et des qualités en calcul. On observe de temps en temps des candidat.e.s plus sensibles au stress ou qui semblent perdre courage au fur et à mesure de l'oral. Nous rappelons donc à l'ensemble des admissibles que les questions du jury sont là pour aider à avancer dans l'exercice, que chaque année des candidat.e.s font de très bons oraux après un départ laborieux, et qu'il ne faut pas chercher à interpréter la discussion avec le jury, les exercices étant très différents les uns des autres.

Comme l'année précédente, nous avons noté de sérieuses difficultés sur les exercices de calcul différentiel et de géométrie. En calcul différentiel, des questions comme « quelle est la taille/nature de cet objet ? » ou « quel est le lien entre cette matrice et les dérivées partielles de l'application ? » ont révélé des difficultés sur cette partie du programme. En géométrie, l'interprétation géométrique d'applications linéaires extrêmement simples, données par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou la question « quelle est l'image d'un carré par une application linéaire ? » ont posé des difficultés d'autant plus surprenantes que les candidat.e.s font preuve d'une agilité remarquable sur des points du programme nettement plus délicats. Une autre source de difficultés récurrentes est la combinatoire, maltraitée par certains candidats visiblement peu préparés à ce type de raisonnement. Tenter d'établir des bijections entre certains ensembles ou de décomposer certaines permutations (par exemple les dérangements) pour les compter devrait être naturel, même si le résultat n'est pas connu.

Pour finir, voici quelques conseils pour les futur.e.s candidat.e.s, qui recoupent en grande partie ceux des années précédentes.

- On voit trop de candidat.e.s refuser de rédiger leurs preuves malgré l'insistance du jury et se contenter d'en répéter l'idée générale. Si l'exposé de la stratégie de preuve est apprécié par le jury, sa mise en œuvre se révèle souvent plus délicate qu'il n'y parait.

Il faut donc rédiger proprement une preuve, vérifier les hypothèses des théorèmes, éventuellement énoncer des résultats intermédiaires, etc. Renâcler à passer à l'écrit ou pire, suggérer que le jury (qui a écrit l'exercice...) n'a pas compris est du plus mauvais effet.

- De même, malgré l'insistance parfois pressante du jury, certains candidats rechignent à écrire proprement les hypothèses des questions au tableau, et plus généralement tout ce qui ne relève pas de la formule mais fait quand même partie intégrante du langage mathématique : connecteurs logiques, quantificateurs, etc. Inutile de dire que c'est une très mauvaise idée. En premier lieu, cela permet, à tout moment, de retrouver l'énoncé précis du résultat auquel on souhaite aboutir, et d'isoler les hypothèses utiles à chaque étape du raisonnement. Ensuite, cela permet réutiliser dans la suite de la planche les questions déjà traitées (ce qui est en somme assez courant). Enfin, ne pas faire ce que demande le jury démontre soit une capacité de communication limitée, soit une témérité quelque peu inattendue lors d'une épreuve orale. Notons que la gestion du tableau est une compétence évaluée, au moins indirectement, par le jury.
- Certains candidats ne tiennent pas compte des pistes fournies par l'examinateur au cours de l'épreuve. Le but du jury n'est pas d'embrouiller le candidat ou de le lancer sur de fausses pistes, mais bien de le guider dans la résolution d'exercices parfois très difficiles. Ne pas être attentif à ces indications revient à se tirer une balle dans le pied.
- À tout moment de l'oral le jury peut être amené à poser des questions très simples autour du cours ou de cas particulier. C'est tout à fait normal, cela ne présage en rien de la réussite de la personne interrogée mais vise à évaluer de manière la plus complète possible son oral. Cela peut aussi constituer une indication (à demi) cachée pour la résolution de l'exercice, que ce soit par l'utilisation directe de la propriété demandée ou bien de son idée de preuve.
- Le jury apprécie les candidat.e.s qui, lorsqu'ils sèchent sur une question, proposent d'eux même de traiter des cas simples (le plus souvent il s'agit de traiter le cas $n = 2$ avant de s'attaquer à des n quelconques, que n soit une dimension, une régularité, un cardinal ou un paramètre). Il est assez rare que les personnes interrogées osent simplifier un énoncé difficile, or quand elles le font l'initiative est souvent couronnée de succès et débouche sur une preuve générale. Lorsqu'une telle simplification devient triviale et ne permet pas d'avancer sur le cas général, le jury apprécie aussi que les candidat.e.s s'en rendent compte d'eux-mêmes.
- Les exercices font exceptionnellement intervenir des objets ne tombant pas directement dans le programme (par exemple, EDO non linéaires). Dans ce cas, le jury est bien conscient de ce fait, et aucune connaissance hors programme n'est attendue des candidat.e.s. Le but de telles questions est de voir comment l'aspirant.e normalien.ne réagit face à la nouveauté ou à un cadre original. Les énoncés sont conçus pour pouvoir être résolus grâce à une réflexion ne faisant intervenir que des notions connues des candidat.e.s (et aucune dans l'adhérence du programme), pas de panique donc !
- Le niveau des exercices proposés étant relativement hétérogène, il est compensé par la quantité d'indications fournies par le jury. Les candidats ne doivent donc pas s'inquiéter — et surtout pas se pétrifier comme on l'a parfois vu — si l'examinateur à tendance à lui en fournir régulièrement : cela peut simplement signifier que l'exercice proposé est très difficile et nécessite un soutien régulier du jury pour être résolu dans les 45 minutes imparties.
- Trop peu de candidats s'appuient sur des dessins lors de l'épreuve, et cela y compris pour des exercices de topologie dans le plan ! Leur usage — largement récompensé

par le jury — est pourtant d'une aide souvent cruciale.

- C'est en général une très mauvaise idée de changer les notations de l'énoncé fourni par le jury : elles ont été prévues pour aider le candidat dans son raisonnement et éviter les conflits de notation pour la suite de l'épreuve.
- L'erreur est humaine : il arrive parfois que certains énoncés (ou bien leurs corrections, que l'examinateur a en sa possession) contiennent des approximations ou des erreurs. Les candidats voyant les membres du jury utiliser leur téléphone pendant les épreuves doivent donc savoir que ce n'est pas pour moquer leurs erreurs de signes en direct sur les réseaux sociaux, mais bien pour communiquer avec les autres examinateurs, qui interrogent simultanément sur le même exercice.

Pour illustrer quelques-uns de ces points, voici des exemples d'exercices proposés lors des épreuves orales.

Exercice : *Soient n un entier non nul et $(V_1,\dots V_{n+1})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel) telle que :*

$$\forall\, i \neq j \quad (V_i|V_j) < 0.$$

Montrer que la famille $(V_1,\dots,V_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice : *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction on définit pour $a \leq x \leq b$*

$$TV(f) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=0}^{N} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,\ a \leq x_0 \leq \cdots \leq x_{N+1} \leq b \right\}.$$

Si $TV(f) < +\infty$ on dit que f est à variation bornée.

1. *Montrer que toute fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ est à variation bornée.*
2. *Pour $[a,b] = [-1,1]$, montrer que la fonction $f(x) = x^2\cos(\frac{\pi}{x^2})$ est dérivable mais n'est pas à variation bornée. Y a t-il une contradiction avec la question précédente ?*
3. *On munit l'ensemble des fonctions à variation bornée de la norme $||f|| = TV(f)+|f(a)|$. Montrer qu'on obtient bien une norme.*
4. *Montrer que cette norme est équivalente à $\mathscr{N}(f) = TV(f) + \sup|f|$*
5. *Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$, montrer que $TV(f) = \int_a^b |f'|$.*

Exercice : *Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul, $\mathscr{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ et $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{S}_n$ désigne l'ensemble des dérangements de $\{1,\dots,n\}$ (permutations sans point fixe).*

1. *Soient $U_1,\dots,U_n$ des variables aléatoires indépendantes avec U_i de loi uniforme sur $\{1,\dots i\}$. Montrer que le produit de transpositions aléatoires*

   $$(1,U_1)\circ(2,U_2)\circ\cdots\circ(n,U_n)$$

   suit la loi uniforme sur $\mathscr{S}_n$.
2. *Soit $(\sigma_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\mathscr{S}_n$. On pose*

   $$T = \inf\{k \geq 1 : \sigma_k \in \mathscr{D}_n\}.$$

   Quelle est la loi de T ? de σ_T ?

3. *Montrer que*

$$\sharp\mathscr{D}_{n+2} = (n+1)\left(\sharp\mathscr{D}_{n+1} + \sharp\mathscr{D}_n\right)$$

et en déduire que

$$\frac{\sharp\mathscr{D}_n}{\sharp\mathscr{S}_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$