

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - B - (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

## Notations

Dans ce problème,  $N, M$  et  $P$  désignent des entiers naturels non nuls. Soit  $\mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles à  $N$  lignes et  $M$  colonnes. Si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M} \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{R})$ , on note

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^M |a_{i,j}|.$$

Il s'agit d'une norme sur  $\mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $N$  et on identifie  $\mathbb{R}^N$  à l'espace vectoriel des matrices colonnes réelles  $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ . L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^N$  est ainsi également normé : si  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\|X\| = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$  est un entier naturel et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{C}^n(I)$  l'espace vectoriel des fonctions sur  $I$ , à valeurs réelles, de classe  $\mathcal{C}^n$ , c'est à dire  $n$  fois dérivables sur  $I$  et dont la  $n$ -ième dérivée est continue sur  $I$ .

On munit  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

On note  $|S|$  le cardinal d'un ensemble fini  $S$ . Pour tout nombre réel  $a$ , on note  $[a]$  la partie entière de  $a$ , c'est-à-dire le plus grand entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq a$ .

## Partie I

Dans cette partie, on considère  $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , et  $x \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  une solution **non nulle** de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - p(t)x(t) = 0. \quad (1)$$

On note  $\mathcal{Z} = \{t \in [0, 1] \mid x(t) = 0\}$  l'ensemble des zéros de  $x$  sur  $[0, 1]$ .

**1a.** Soit  $s \in [0, 1]$  tel que  $x(s) = 0$ . Montrer que  $x'(s)$  est non nul.

**1b.** Montrer que  $\mathcal{Z}$  est fini.

**2.** On pose  $n = |\mathcal{Z}|$ . On suppose dans cette question que  $n \geq 2$ . On note  $a_1, \dots, a_n$  les zéros de  $x$ , rangés en ordre croissant. Soit  $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  tel que

$$\forall t \in [0, 1], \quad q(t) < p(t). \quad (2)$$

On considère une fonction  $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\forall t \in [0, 1], \quad y''(t) - q(t)y(t) = 0. \quad (3)$$

On fixe  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Le but de cette question est de montrer que  $y$  s'annule sur  $]a_j, a_{j+1}[$ .

**2a.** On suppose d'abord que

$$\forall t \in ]a_j, a_{j+1}[, \quad x(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) > 0,$$

et on note

$$w(t) = y(t)x'(t) - y'(t)x(t).$$

Montrer que  $w(a_{j+1}) > w(a_j)$ . En déduire une contradiction.

**2b.** Montrer qu'il existe  $t \in ]a_j, a_{j+1}[$  tel que  $y(t) = 0$ .

On fixe dans toute la suite du sujet  $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ . Pour tout réel  $\lambda$ , on note  $x_\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  l'unique solution de

$$\begin{cases} x_\lambda''(t) - p(t)x_\lambda(t) + \lambda x_\lambda(t) = 0 & \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ x_\lambda(0) = 0, \quad x_\lambda'(0) = 1. \end{cases} \quad (E_\lambda)$$

## Partie II

**3.** Soient  $a, b, T$  trois réels strictement positifs.

**3a.** On considère une fonction  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que

$$\forall t \in [0, T], \quad f(t) \leq a + b \int_0^t f(s) ds.$$

Montrer que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $f(t) \leq ae^{bt}$ .

On pourra étudier les variations de la fonction définie par  $t \mapsto \varphi(t) = e^{-tb} \left( a + b \int_0^t f(s) ds \right)$ .

**3b.** On considère une fonction  $X : [-T, T] \rightarrow \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall t \in [-T, T], \quad \|X'(t)\| \leq a + b\|X(t)\|.$$

Montrer que pour tout  $t \in [-T, T]$ ,  $\|X(t)\| \leq (\|X(0)\| + aT)e^{b|t|}$ .

**4.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{M,P}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

On note  $X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x_\lambda(t) \\ x'_\lambda(t) \end{pmatrix}$  et on définit l'application  $\Phi : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, t) \mapsto X_\lambda(t) \end{matrix}$ .

**5.** Montrer que  $X_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X'_\lambda(t) = A_\lambda(t)X_\lambda(t)$  où  $A_\lambda(t)$  est une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  que l'on précisera.

Dans les question **6**, **7** et **8**, on se donne  $R > 0$  et on note

$$c = \sup\{\|A_\lambda(t)\| \mid (t, \lambda) \in [-R, R]^2\}.$$

**6.** Justifier que  $c$  est bien défini et montrer que

$$\forall t \in [-R, R], \quad \|X_\lambda(t)\| \leq e^{c|t|}.$$

**7a.** Soit  $(s, t, \lambda) \in [-R, R]^3$ . Montrer que

$$\|X_\lambda(t) - X_\lambda(s)\| \leq ce^{cR}|t - s|.$$

**7b.** Soit  $(t, \lambda, \mu) \in [-R, R]^3$ . Montrer que

$$\|X_\lambda(t) - X_\mu(t)\| \leq Re^{2cR}|\lambda - \mu|.$$

**7c.** Conclure que  $\Phi$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**8a.** Montrer qu'il existe une fonction  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  croissante, continue, et telle que  $\omega(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0$  et

$$\forall (s, t) \in [-R, R]^2, \quad |p(t) - p(s)| \leq \omega(|t - s|).$$

**8b.** Montrer qu'il existe une fonction  $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue telle que  $\alpha(r) = o(r)$  quand  $r \rightarrow 0$  et

$$\forall (s, t, \lambda) \in [-R, R]^3, \quad \|X_\lambda(t) - X_\lambda(s) - (t - s)A_\lambda(s)X_\lambda(s)\| \leq \alpha(|t - s|).$$

**8c.** Pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction  $Y_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'_\mu(t) = A_\mu(t)Y_\mu(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_\mu(t), \quad \text{avec } Y_\mu(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\forall (t, \lambda, \mu) \in [-R, R]^3, \quad \|X_\lambda(t) - X_\mu(t) - (\lambda - \mu)Y_\mu(t)\| \leq R^2 e^{3cR}|\lambda - \mu|^2.$$

**8d.** Montrer que  $\Phi$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  et préciser sa différentielle.

**9.** On note  $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$X_\lambda(t) = e^{tB_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)B_\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ p(s)x_\lambda(s) \end{pmatrix} ds.$$

**10.** On suppose dans cette question que  $\lambda > 0$ .

**10a.** Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_\lambda(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda}(t-s)) p(s) x_\lambda(s) ds.$$

**10b.** En déduire que

$$\forall t \in [0, 1], \quad |x_\lambda(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\frac{\|p\|_\infty}{\sqrt{\lambda}} t}.$$

### Partie III

On note  $Z_p$  l'application qui à  $\lambda \in \mathbb{R}$  associe le nombre de zéros de  $x_\lambda$  sur  $]0, 1]$ , autrement dit

$$Z_p(\lambda) = \left| \left\{ t \in ]0, 1] \mid x_\lambda(t) = 0 \right\} \right|.$$

On remarquera que ce décompte ne tient pas compte de 0, qui est toujours un zéro de  $x_\lambda$ .

**11.** Montrer que si pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $q(t) < p(t)$ , alors  $Z_p(\lambda) \leq Z_q(\lambda)$ . En déduire que  $Z_p$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que si  $\lambda < \mu$  et  $x_\mu(1) = 0$ , alors  $Z_p(\mu) \geq Z_p(\lambda) + 1$ .

**12.** On suppose dans cette question uniquement que  $p$  est une fonction constante. Calculer  $x_\lambda$ , puis déterminer  $Z_p(\lambda)$  en distinguant selon les valeurs de  $\lambda$  et  $p$ .

**13.** Soit

$$p_+ = \sup_{t \in [0, 1]} p(t), \quad p_- = \inf_{t \in [0, 1]} p(t).$$

**13a.** Justifier que  $p_+$  et  $p_-$  sont des réels bien définis.

Montrer que si  $\lambda < p_-$ , alors  $Z_p(\lambda) = 0$ , et que si  $\lambda \geq p_-$ , alors  $Z_p(\lambda) \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda + 1 - p_-}}{\pi} \right\rfloor$ .

**13b.** Montrer que si  $\lambda \geq 1 + p_+$ , alors  $\left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - 1 - p_+}}{\pi} \right\rfloor \leq Z_p(\lambda)$ .

Montrer que si de plus  $x_\lambda(1) = 0$ , alors  $\left\lfloor \frac{\sqrt{\lambda - 1 - p_+}}{\pi} \right\rfloor + 1 \leq Z_p(\lambda)$ .

**14.** On fixe dans cette question  $\mu \in \mathbb{R}$ . On note  $k = Z_p(\mu)$ , et  $(t_j)_{0 \leq j \leq k}$  les zéros de  $x_\mu$  rangés en ordre croissant :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq 1.$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$A_\varepsilon := \left\{ t \in [0, 1] \mid \exists j \in \{0, \dots, k\}, |t_j - t| \leq \varepsilon \right\}$$

et

$$B_\varepsilon := \left\{ t \in [0, 1] \mid \forall j \in \{0, \dots, k\}, |t_j - t| \geq \varepsilon \right\}$$

- 14a.** Montrer qu'il existe trois réels  $\varepsilon, \theta, \eta > 0$  tels que les conditions suivantes sont vérifiées  
 (1) pour tout  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ , on a  $t_{j+1} - t_j \geq 2\varepsilon$  et si  $t_k < 1$ , alors  $t_k + \varepsilon \leq 1$ ,  
 (2) si  $|\lambda - \mu| < \theta$ , alors  $|x'_\lambda(t)| \geq \eta$  pour tout  $t \in A_\varepsilon$  et  $|x_\lambda(t)| \geq \eta$  pour tout  $t \in B_\varepsilon$ .  
 On pourra utiliser la continuité de la fonction  $\Phi$  obtenue à la question **7c**.

Jusqu'à la fin de la question **14**, on fixe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $|\lambda - \mu| < \theta$ .

- 14b.** Montrer que pour tout  $j \in \{0, \dots, k\}$ ,  $x_\lambda$  a au plus un zéro  $t$  tel que  $|t - t_j| < \varepsilon$ .  
 Montrer que si de plus  $j \geq 1$  et  $t_j < 1$ ,  $x_\lambda$  a exactement un zéro  $t$  tel que  $|t - t_j| < \varepsilon$ .

- 14c.** Montrer que si  $x_\mu(1) \neq 0$ , alors  $Z_p(\lambda) = Z_p(\mu)$ .

- 14d.** Montrer que si  $x_\mu(1) = 0$ , alors  $Z_p(\lambda) = Z_p(\mu) - 1$  pour  $\lambda < \mu$  et  $Z_p(\lambda) = Z_p(\mu)$  pour  $\lambda \geq \mu$ .

- 15.** Montrer que  $\{Z_p(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{N}$ .

On pose, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_k := \sup\{\lambda \mid Z_p(\lambda) = k - 1\}$ .

- 16a.** Justifier que la suite  $(\lambda_k)_{k \geq 1}$  est bien définie, croissante et tend vers  $+\infty$ .

- 16b.** Montrer que  $x_{\lambda_k}(1) = 0$  et que  $x_{\lambda_k}$  a exactement  $k$  zéros sur  $]0, 1]$ .

- 17.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda_k \geq 1 + p_+$ .

- 17a.** Donner une minoration et une majoration de  $k$  en fonction de  $\lambda_k - p_-$  et  $\lambda_k - p_+$ .

- 17b.** En déduire que  $\sqrt{\lambda_k} = \pi k + O\left(\frac{1}{k}\right)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

- 17c.** Donner un équivalent de  $N(\lambda) := \left| \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid \lambda_k \leq \lambda \right\} \right|$  quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

## Partie IV

On suppose dans toute cette partie que  $p$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Le but de cette partie est de préciser les estimations obtenues dans la partie précédente, dont on reprend les notations.

- 18.** On suppose dans cette question que  $\lambda > 0$ . On définit la fonction  $S_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \sin(\sqrt{\lambda}t)$ , et si  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ , on pose

$$\forall t \in [0, 1], \quad I_\lambda(f)(t) := \int_0^t S_\lambda(t-s)p(s)f(s)ds.$$

- 18a.** Montrer que cette formule définit une application linéaire continue  $I_\lambda$  de l'espace vectoriel normé  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  dans lui-même, et montrer qu'il existe un réel  $K > 0$  tel que

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1]), \quad \|I_\lambda(f)\|_\infty \leq K\|f\|_\infty.$$

**18b.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$x_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_\lambda + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda^{\frac{j+1}{2}}} \underbrace{I_\lambda \circ \cdots \circ I_\lambda}_{j \text{ fois}}(S_\lambda) + r_{n,\lambda},$$

où  $r_{n,\lambda} \in \mathcal{C}^0([0, 1])$  et qu'il existe un réel  $C_n > 0$  tel que

$$\forall \lambda \geq 1, \quad \|r_{n,\lambda}\|_\infty \leq \frac{C_n}{\lambda^{\frac{n+2}{2}}}.$$

**18c.** Montrer que, quand  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda_k}(1-s)) p(s) \sin(\sqrt{\lambda_k}s) ds = O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

**18d.** On note  $\varepsilon_k = \sqrt{\lambda_k} - \pi k$ . Montrer qu'il existe un réel  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que l'on précisera, tel que

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k})}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{(-1)^k}{k} \varepsilon_k \alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

**18e.** Montrer qu'il existe un réel  $\beta \in \mathbb{R}$ , dépendant seulement de  $p$  et que l'on précisera, tel que

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{\lambda_k}(1-s)) p(s) \sin(\sqrt{\lambda_k}s) ds = \beta(-1)^k + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

**18f.** Montrer qu'il existe un réel  $\gamma$ , dépendant seulement de  $p$  et que l'on précisera, tel que :

$$\sqrt{\lambda_k} = \pi k + \frac{\gamma}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

**19.** Montrer qu'il existe une fonction  $h \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ , ne dépendant que de  $p$  et que l'on précisera, telle que pour tout entier  $k$  assez grand,

$$\forall t \in [0, 1], \quad x_{\lambda_k}(t) = \frac{1}{\pi k} \sin(\pi k t) + \frac{1}{k^2} h(t) \cos(\pi k t) + R_k(t),$$

où  $R_k \in \mathcal{C}^0([0, 1])$  vérifie

$$\|R_k\|_\infty = O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$