Rapport sur l'oral de Mathématiques
ENS Lyon - MP - Session 2018

Ramla Abdellatif, Grégory Ginot, Julien Marché

Coefficient (en pourcentage du total d'admission) : 16,2%

1 Commentaires d'ordre général

Rappel sur le déroulement de l'épreuve

Cette épreuve se déroule typiquement en deux temps. Dans un premier temps, l'examinateur dicte l'énoncé de l'exercice au candidat, puis il le laisse réfléchir pendant une petite dizaine de minutes. Cette première étape est primordiale : tout d'abord, elle permet au candidat de s'assurer qu'il comprend bien l'énoncé et que tous les termes employés lui sont clairs ; dans le cas contraire, il est nécessaire d'en faire part à l'examinateur, qui ne lui en tiendra pas rigueur. Ensuite, cette phase est celle où le candidat peut a priori le plus faire preuve de créativité, et où toute prise d'initiative est bienvenue. En effet, l'examinateur attend à ce stade une certaine réactivité de la part du candidat : schématisation de la situation présentée, essai sur quelques exemples, traitement de certains cas particuliers, dégagement de conditions nécessaires et/ou sufffisantes, étude éventuelle d'énoncés un peu plus faibles, etc. sont grandement appréciés. Notons cependant qu'il reste judicieux de prendre un temps de réflexion suffisant pour étudier l'énoncé afin d'éviter de se lancer inutilement dans des calculs laborieux ou de formuler des remarques peu pertinentes (voire grossièrement fausses). Quelques instants de silence ne seront jamais reprochés au candidat.

S'ensuit, dans un second temps, une période d'échanges entre l'examinateur et le candidat. La forme de ces échanges reste partiellement conditionnée par le déroulement de la première phase : l'examinateur peut choisir de laisser le candidat poursuivre le raisonnement entamé si celui-ci permet la mise en oeuvre d'une évaluation suffisante des compétences du candidat, ou proposer une (ou plusieurs) indication(s) afin de guider le candidat dans sa réflexion. Rappelons que rien n'oblige le candidat à suivre les indications données, même s'il y est tout de même incité, et que cela ne préjuge en rien de l'issue de l'oral.

L'examinateur peut être amené à poser des questions plus directes pour tester la solidité des connaissances du candidat, ou pour revenir sur un point insuffisamment détaillé, voire erroné, du raisonnement présenté. Notons qu'une erreur est très rarement considérée comme rédhibitoire. En revanche, il est attendu que le candidat soit capable de faire preuve d'auto-critique et que, dans le cadre d'une démarche scientifique constructive, il puisse corriger les erreurs qu'il aura relevées. De même, s'il est possible d'avancer des idées vagues et de partager des intuitions lors de la conversation entre le candidat et l'examinateur, il est impératif de finir par développer une démonstration mathématique rigoureuse, complète et correcte.

Au bout du temps imparti, il est demandé au candidat de quitter rapidement la salle, afin de permettre le respect de l'emploi du temps du concours.

Remarques complémentaires quant au déroulement de l'épreuve

Les exercices proposés sont de natures et de difficultés très variables. L'examinateur en a tout à fait conscience et en tient compte dans sa notation. Notons que la capacité du candidat à jauger la difficulté de l'exercice proposé est une qualité très appréciée par l'examinateur. De même, la prestation du candidat est jugée sur toute la durée de l'épreuve : il importe donc de rester dynamique, positif et mobilisé tout au long de l'oral, un oral mal engagé ne préjugeant en rien de l'issue de l'épreuve. Il ne faut en aucun cas que le candidat désespère s'il ne résoud pas l'exercice posé en quelques minutes : en effet, les énoncés proposés sont choisis pour permettre le développement progressif d'un raisonnement mathématique, ainsi que l'évaluation des capacités d'initiative et de réflexion du candidat, du degré de maîtrise de diverses connaissances mathématiques, et de la capacité à exploiter ces connaissances dans un contexte un peu différent. La recherche active d'angles d'attaque possibles du problème est grandement valorisée, tout comme le sont l'écoute et la prise en compte des indications données par l'examinateur, ou encore la capacité à reconnaître qu'une piste suivie est finalement peu pertinente puis à relancer une recherche dans une autre direction. Ainsi, rester muet et inactif en attendant que l'examinateur donne une première indication est une attitude peu recommandée.

Notons que certains candidats tendent à s'auto-censurer en s'interdisant d'utiliser des notions hors ou au-delà du programme. Un peu de culture mathématique, qui plus est utilisée à bon escient, ne peut jamais nuire et ne sera jamais reprochée. Il semble toutefois nécessaire de rappeler que l'honnêteté intellectuelle est de mise, et que le candidat peut être interrogé sur toute notion qu'il évoque. En ce cas, les réponses évasives ou les tentatives de bluff à base de « c'est clair/trivial/évident » et d'arguments sciemment omis sont contre-productives. A toutes fins utiles, rappelons enfin qu'aucun exercice posé ne nécessite l'utilisation de notions hors-programme.

2 Exemples d'exercices proposés lors de cette session

Exercice 1 : *Déterminer, à isomorphisme près, tous les sous-groupes finis du groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$.*

Commentaires : Cet énoncé, d'abord simple, a souvent été maltraité par manque de compréhension des objets en jeu. La description matricielle des isométries du plan a été majoritairement favorisée par les candidats, alors qu'une vision géométrique (rotations et symétries) permettait de faire naturellement émerger une dichotomie déterminée par l'existence d'une symétrie ou non dans le sous-groupe concerné. Il est assez surprenant de constater que certains candidats ont éprouvé de grandes difficultés à retrouver la forme matricielle des éléments de $O_2(\mathbb{R})$. Les connaissances requises pour résoudre ce problème étaient finalement peu avancées, mais elles devaient être suffisamment maîtrisées pour permettre la manipulation de groupes moins familiers.

Exercice 2 : *Démontrer que pour tout entier k et tout entier $n \geq 2$, n divise* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k^{\mathrm{pgcd}(i,n)}$.

Commentaires : Cet exercice reposait sur une bonne compréhension des notions de base de l'arithmétique modulaire et sur une certaine prise d'initiative, par exemple pour traiter quelques valeurs particulières de k. Réécrire ensuite la somme en fonction des valeurs prises par le pgcd permettait de l'exprimer naturellement à l'aide de la fonction indicatrice d'Euler, et suggérait alors de mener un raisonnement selon la décomposition en facteurs premiers de n. Cet exercice permettait de vérifier la connaissance de certains résultats fondamentaux : théorème de Lagrange, théorème d'Euler et petit théorème de Fermat ne peuvent être occultés, et il est de bon ton d'avoir une idée des connexions reliant ces différents énoncés.