ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2019

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche, à fonctionnement autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé.

⋆ ⋆ ⋆

Ce sujet comprend deux parties indépendantes. La première est un questionnaire de connaissance générale et la seconde l'étude d'un problème.

A – Questionnaire

On formulera les réponses de façon concise (en quelques lignes), mais claire et précise. Il n'est pas attendu de justification des réponses données ni de définition des éventuelles notations introduites (sauf pour la question (**4**) où il faudra définir clairement les grandeurs mises en relation).

1. Écrire l'équation différentielle, sous sa forme canonique, décrivant le comportement d'un oscillateur harmonique amorti.

2. Représenter le schéma de principe d'un interféromètre de MICHELSON dans sa configuration en lame d'air.

3. Représenter le diagramme de BODE (gain et phase) d'un filtre (linéaire) passe-bas du premier ordre.

4. Donner l'expression de l'accélération de CORIOLIS.

5. Donner l'expression générale du moment cinétique d'un système mécanique (discret ou continu).

6. Écrire la (ou une) relation de LAPLACE, en thermodynamique. Préciser son cadre d'application.

7. Préciser la formule de FRESNEL relative aux interférences lumineuses.

8. Écrire la loi de FICK relative à un processus de diffusion.

9. Indiquer la dimension d'un coefficient de diffusion.

10. Définir la notion de milieu dispersif vis-à-vis de la propagation d'une onde. Indiquer alors, à travers la relation de dispersion caractérisant l'interaction entre une onde harmonique plane $(\omega,\vec{k})$ et le milieu, ce qui différentie un milieu dispersif d'un milieu non dispersif.

B – Étude de la propagation d'un soliton dans un pendule de NEWTON

Un pendule de NEWTON est une chaîne de billes identiques, suspendues à des fils, et initialement en contact et au repos (voir la figure, à droite de ce texte). Lorsqu'une bille percute l'une des extrémités de la chaîne, une onde de compression est créée et se propage le long de la chaîne. Lorsque cette onde atteint son autre extrémité, la dernière bille se détache alors que les autres semblent (en première approximation) rester au repos. Nous nous proposons d'étudier la propagation d'une onde soliton[a] dans cette chaîne d'oscillateurs anharmoniques.

[a] Un soliton, ou onde solitaire, est une perturbation d'extension spatiale finie qui se propage en conservant sa forme initiale. Le milieu propagatif doit alors présenter des caractéritiques de dispersion et de non linéarité particulières.

Nous supposons que lors de la propagation de l'onde dans la chaîne (horizontale) toutes les billes conservent la même altitude et qu'elles restent en contact. Nous notons $x_n(t)$ la position (selon l'horizontale) de la n-ième bille (voir figure (1)).

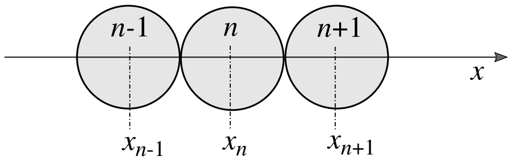

FIGURE 1 – Paramétrage géométrique de la chaîne de billes (seulement trois billes sont représentées).

Caractéristiques des billes (en acier).

- Masse volumique : $\rho = 7800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- Module d'YOUNG : $E = 200$ GPa
- Diamètre : $a = 1$ cm
- Masse : $m \simeq 4$ g

1 Modèle du contact de HERTZ.

1. Rappeler la définition du module d'YOUNG d'un matériau.

2. La vitesse du son dans un milieu élastique (ρ, E) est donnée par la relation :

$$c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1}$$

Calculer sa valeur pour l'acier.

• La force de contact que la bille n exerce sur la bille $n+1$ s'exprime (se reporter à la figure (1)) :

$$\vec{F}_{n/n+1} = q\,\delta_{n+1}^{3/2}\,\vec{u}_x \quad \text{où} \quad \delta_{n+1} = a - (x_{n+1} - x_n) \quad (\forall n,\ \delta_{n+1} \geq 0) \tag{2}$$

La constante q dépend [1] du diamètre a et du module d'YOUNG E. Nous appelerons la grandeur δ_{n+1} l'interpénétration des billes n et $n+1$.

3. Préciser l'origine de la non-linéarité de la dépendance de cette force avec l'interpénétration. Proposer un argument justifiant que l'exposant de δ_{n+1} est supérieur à l'unité.

4. Par analyse dimensionnelle, déterminer la forme de la dépendance de q avec E et a. Dans la suite nous considérerons que l'éventuel préfacteur numérique intervenant dans cette relation est unitaire.

5. Calculer la valeur de q.

6. Nous définissons la grandeur K par la relation $K = qa^{1/2}$. Préciser ce que cette grandeur est susceptible de représenter.

7. Calculer la valeur de K.

8. Une bille est lancée, avec la vitesse v_0, contre une autre bille maintenue fixe. Exprimer, en fonction de m, q, et v_0, l'interpénétration maximale δ_{M} atteinte au cours du choc.

9. Calculer la valeur numérique de δ_{M} correspondant à la vitesse v_0 qui serait acquise après à une hauteur de chute libre de 5 cm.

2 Équation d'onde.

Nous souhaitons établir l'équation de propagation d'une onde de compression dans une chaîne de billes. Nous nous plaçons dans un cadre tel que deux billes consécutives restent toujours en contact. Dans la situation de référence, c'est-à-dire en l'absence d'onde, toutes les billes constituant la chaîne sont au repos, aux abscisses $x_n^0 = na$. Enfin, nous posons $u_n = x_n - x_n^0$.

10. Préciser le signe de la différence $u_n - u_{n+1}$.

11. Établir que l'équation régissant le mouvement de la $n^{\text{ième}}$ bille est donnée par la relation (nous supposons qu'il ne s'agit ni de la première bille de la chaîne, ni de la dernière) :

$$a^{1/2}\, \ddot{u}_n = \Omega_0^2 \left\{ (u_{n-1} - u_n)^{3/2} - (u_n - u_{n+1})^{3/2} \right\} \tag{3}$$

où Ω_0^2 est une constante dont on donnera l'expression en fonction de K et m.

12. Cette équation est censée décrire la propagation d'une onde de compression le long de la chaîne. Indiquer alors quelle hypothèse cette description discrète présuppose.

13. Sous l'hypothèse que nous venons d'évoquer, nous allons passer d'une description discrète à une description continue du champ de déplacement. Nous noterons alors maintenant $u_n = u(x)$ (hypothèse du milieu continu). En effectuant un développement de TAYLOR de l'équation différentielle (3), jusqu'à l'ordre deux selon la variable d'espace, établir que l'on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{1/2} \tag{4}$$

où c_0 est une constante (positive) dont on donnera l'expression et la dimension.
Au cours du développement de ce calcul nous pourrons supposer que $\partial u / \partial x$ ne s'annule pas.

14. Donner l'expression de c_0 en fonction de c_{son}. Analyser ce résultat.

1. Cette constante dépend également du coefficient de POISSON du matériau mais nous ne tiendrons pas compte de cette dépendance (non cruciale, ici).

3 Solution soliton.

Pour modéliser de façon satisfaisante la propagation d'un soliton le long de la chaîne il s'avère nécessaire de prendre en compte des ordres supérieurs dans le développement de TAYLOR de l'équation différentielle (3). La fonction u vériant l'équation (5) est alors solution de l'équation différentielle de propagation que l'on obtiendrait (plus complexe et non demandée) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A \sin^4\left(\frac{x-ct}{L_0}\right) \tag{5}$$

où A est l'amplitude adimensionnalisée (positive) de l'onde, $L_0 = \sqrt{\frac{5}{2}}\,a$ et $c = \sqrt{\frac{24}{5\pi}}\,A^{1/4}\,c_{\text{son}}$.

15. Définir (d'un point de vue physique) la vitesse de phase d'une onde et donner son expression pour cette onde particulière.

16. Habituellement, en acoustique, la célérité d'une onde dépend uniquement des caractéristiques du matériau. Est-ce également le cas ici ?

• Nous pouvons construire une solution dite "soliton" à partir d'une seule période de la solution précédente (équation (5)). Elle prend alors la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} -A \sin^4\left(\frac{x-ct}{L_0}\right) & , \quad \text{si } 0 < x-ct < \pi L_0 \\ 0 \quad , \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{6}$$

17. Exprimer la dérivée partielle temporelle $\dot{u} = \partial u/\partial t$.

18. Sur deux graphiques disposés en correspondance, représenter l'allure des évolutions $\dot{u}(x,t)$ et $u(x,t)$ de cette solution en fonction du temps t, pour une abscisse x fixée.

19. Sur deux graphiques disposés en correspondance, représenter l'allure des évolutions $\dot{u}(x,t)$ et $u(x,t)$ de cette solution en fonction de l'abscisse x, pour un temps t fixé.

20. Exprimer, en fonction du diamètre a, l'extension spatiale Δx d'une telle onde soliton.

21. L'hypothèse du milieu continu adoptée dès la question (**13**) est-elle vérifiée ?

22. Nous notons Δu la variation de position des billes après le passage du soliton. Exprimer Δu en fonction de A et L_0.

Nous donnons la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \sin^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8} \tag{7}$$

4 Analyse de la propagation.

En réponse à la question (**22**) nous avons établi une relation entre le déplacement Δu et l'amplitude A, à partir de l'expression mathématique de la solution soliton. Nous allons établir une seconde expression de Δu en vue d'exprimer l'amplitude A, non encore fixée.

23. Nous considérons que Δu correspond à l'interpénétration maximale δ_{M} exprimée en réponse à la question (**8**). Exprimer alors Δu en fonction de la vitesse v_0 à l'impact de la bille incidente, de la vitesse du son c_{son} et du diamètre a.

24. Afin de simplifier les calculs nous omettons désormais les préfacteurs numériques intervenant dans les relations. Par exemple, la relation liant la célérité du soliton à la vitesse du son s'écrira simplement $c \sim A^{1/4} c_{\text{son}}$. À partir des réponses aux questions (**22**) et (**23**), établir une expression de c en fonction uniquement de la vitesse incidente v_0 et de la vitesse du son c_{son}.

25. Calculer la valeur numérique de la vitesse c du soliton généré par une bille incidente percutant la chaîne à la vitesse d'impact v_0 calculée en réponse à la question (**9**) (naturellement, toujours sans faire intervenir de préfacteur numérique).

• La propagation d'une onde de compression dans une chaîne de billes peut être étudiée par simulation numérique. Les diagrammes spatio-temporels (**2**), (**3**) et (**4**) représentent l'évolution, avec le temps t (en ms), de la vitesse $\dot{u}(x_n, t)$ (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) de chacune des 20 billes formant la chaîne étudiée. Chaque tracé se rapporte à une bille. Les numéros des billes sont repérés sur le troisième axe (qui constitue l'axe spatial des diagrammes), gradué de 0 à 20.

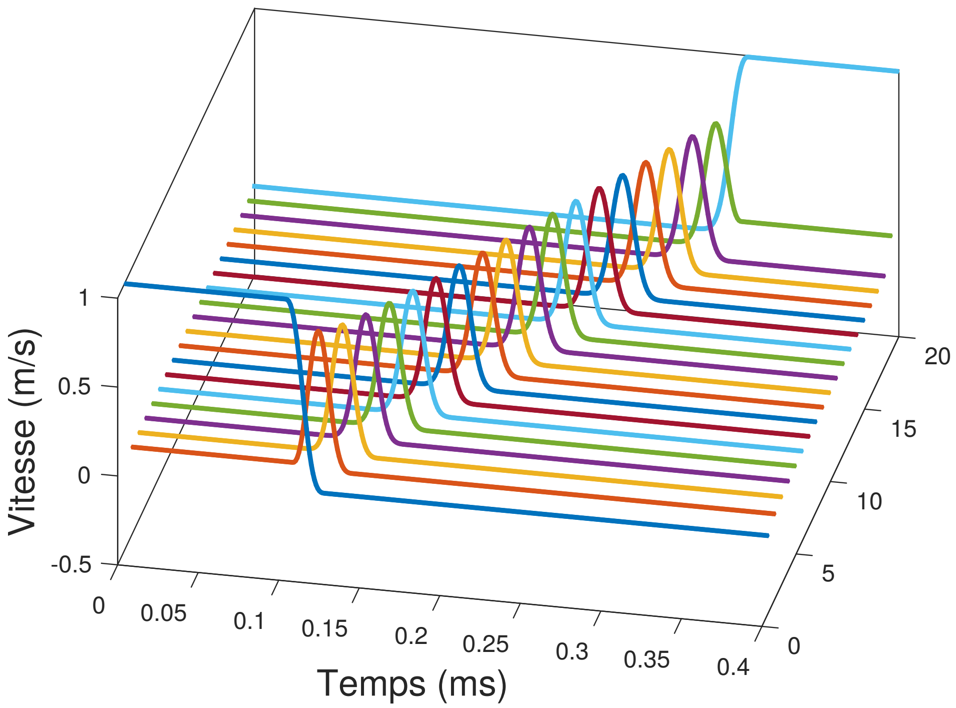

FIGURE **2** – Diagramme représentant la réponse d'une chaîne à l'impact d'une bille incidente. La chaîne est composée de 20 billes au total (c'est-à-dire $19+1$). La vitesse d'impact est v_0.

26. Commenter et analyser la figure (**2**).

27. Déduire de la figure (**2**) une estimation de la célérité c de l'onde soliton. La comparer à celle calculée en réponse à la question (**25**).

28. Analyser, à partir de la figure (**2**), le comportement de l'avant-dernière bille.

29. Préciser pourquoi il apparaît deux ondes sur la figure (**3**) (et sur la figure (**4**) correspondant au même diagramme mais vu selon une autre perspective). Indiquer pourquoi leurs célérités sont différentes.

⋆ ⋆
⋆

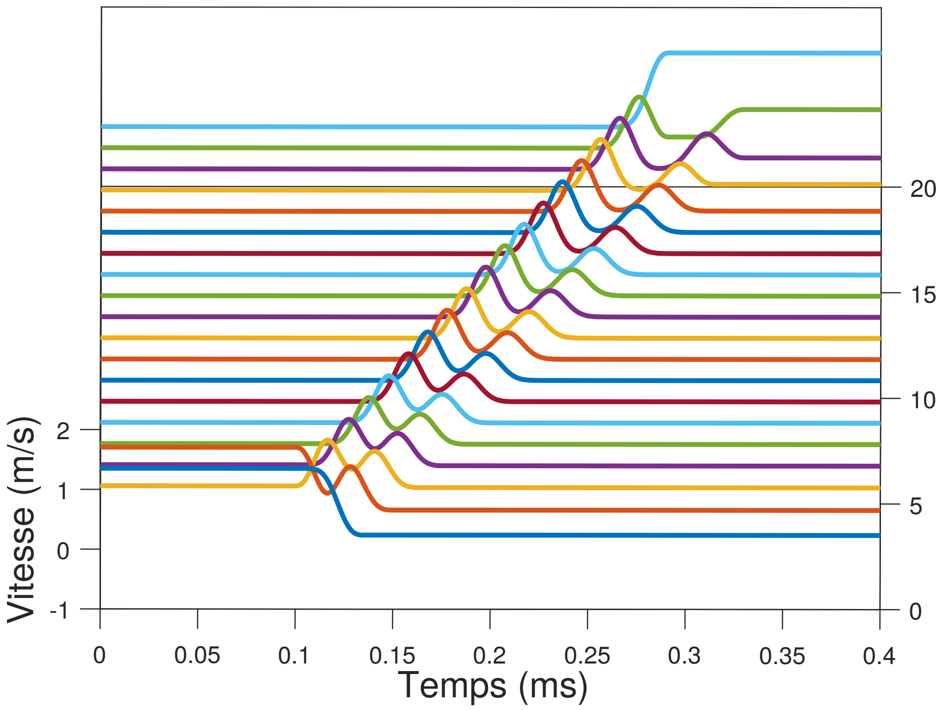

FIGURE 3 – Diagramme représentant la réponse d'une chaîne à l'impact d'un doublet de billes jointives. La chaîne est composée de 20 billes au total (c'est-à-dire $18+2$). La vitesse d'impact est v_0. Cette perspective particulière ne permet pas de mettre en correspondance chacune des évolutions avec l'axe spatial (numéro de bille). On associera alors directement un tracé à une bille, le premier (en bas) se rapportant à la première bille (une fois la chaîne formée des 20 billes).

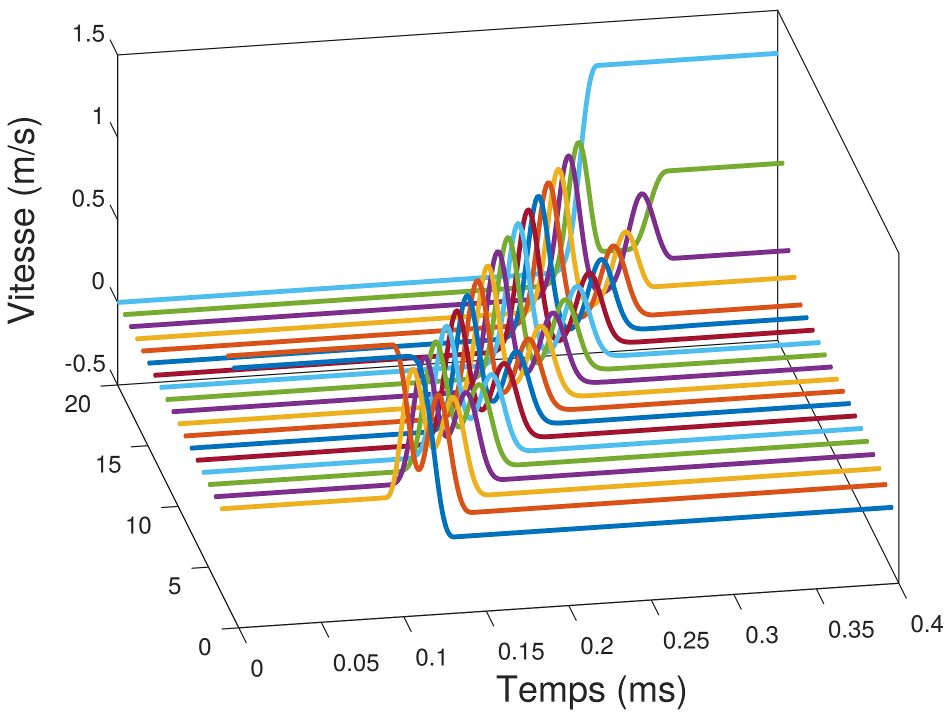

FIGURE 4 – Autre perspective du diagramme représentant la réponse d'une chaîne à l'impact d'un doublet de billes jointives. La chaîne est composée de 20 billes au total (c'est-à-dire $18+2$). La vitesse d'impact est v_0.