Concours MPI 2019 – Épreuve orale d'admission

Mathématiques – Ulm

Omid Amini, Igor Kortchemski

* * *

Rapport de l'épreuve

* * *

L'objectif principal de ce rapport est de fournir aux futures candidates et candidats, enseignantes et enseignants des indications les plus précises et les plus explicites possibles sur l'épreuve orale de mathématiques spécifique ENS-Ulm afin de pouvoir la préparer au mieux. Il s'agit donc de :

– décrire le déroulement de l'épreuve ;

– détailler les critères d'évaluation ;

– effectuer une rapide analyse des notes ;

– donner l'ensemble des sujets posés ainsi que des éléments de discussions abordés autour de ces thèmes ou des questions additionnelles traitées ; et

– plus généralement, rendre compte de la manière et de l'esprit dans lequel le jury a travaillé.

Nous espérons en effet que cela puisse permettre de forger une meilleure vision de ce qui se passe lors de cet oral, ainsi que d'aider l'ensemble des candidates et candidats, enseignantes et enseignants, pour le préparer.

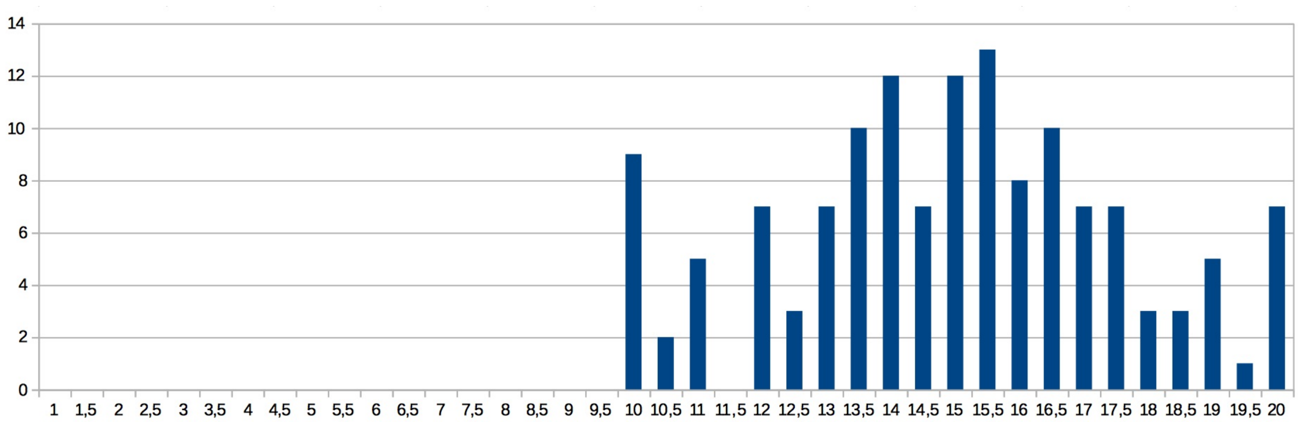

Figure 1 – Histogramme des notes obtenues à cet oral des 138 candidates et candidats admissibles à l'ÉNS Paris à l'issue des examens écrites, qui ont passé l'épreuve. La moyenne est de 14.95/20, la médiane de 15/20 et l'écart-type de 2.61.

Table des matières

1 Type d'épreuve

Format de l'épreuve. L'épreuve dure 55 minutes au tableau, sans préparation.

Déroulement Une fois dans la salle d'interrogation, la candidate ou le candidat est invité à signer la feuille d'émargement après vérification de la convocation et d'une pièce d'identité.

Ensuite, le texte suivant, ou une légère variante, était systématiquement dit :

« Cet oral va durer 55 *minutes environ. Nous allons réfléchir à un ou plusieurs exercices de difficultés variables. À chaque fois l'exercice n'est qu'un prétexte à la discussion mathématique, et c'est elle qui compte. C'est normal s'il y a des points délicats, et arriver à la fin de l'exercice n'est pas l'objectif principal. »*

L'examinateur tendait alors une petite feuille de papier contenant un exercice. Il invitait la candidate ou le candidat à recopier l'énoncé au tableau, en précisant qu'il y aura cinq à dix minutes de réflexion individuelle sans aucune intervention du jury, et que la discussion commencera ensuite seulement.

Après ces moments de réflexion, le jury demandait à la candidate ou au candidat d'expliquer où en étaient leurs réflexions. À partir de ce moment-là, le déroulement de l'oral n'était plus uniforme, le jury s'adaptant aux candidates et candidats :

– lorsqu'une piste est explorée, si elle semble intéressante, le jury laisse d'abord faire sans intervention (toujours bienveillant, il ne cherche pas volontairement à piéger) ;

– en cas de blocage, la discussion est amenée d'abord de manière volontairement floue (*Qu'en pensez-vous ?*, *Qu'est-ce qui vous embête ?*, etc.), pour éventuellement ensuite être précisée (une étude d'un cas particulier ou d'une faible dimension peut par exemple être proposée) ;

– tout au long de l'oral, l'examinateur rebondit naturellement sur ce qui est dit par la candidate ou le candidat, et parfois pose des questions additionnelles, souvent en lien avec ce qui est abordé (par exemple pour savoir ce qui se passe si une hypothèse est relâchée, si on peut trouver un exemple vérifiant les conditions de l'énoncé, pour préciser explicitement un résultat du cours utilisé et esquisser sa démonstration, etc.)

Cet exercice « principal » était souvent, mais pas systématiquement, interrompu 10 ou 15 minutes avant la fin de l'oral pour aborder une autre thématique avec un exercice plus « classique ».

Exercices posés. Des recueils permettent déjà de rassembler de nombreux exercices par l'intermédiaire d'élèves admissibles, ainsi avons-nous souhaité rendre l'ensemble des exercices disponibles pour tout le monde, à la fin de ce rapport. Nous insistons cependant sur le fait que, dans le contexte de l'épreuve orale, ces sujets ne doivent pas être considérés comme des problèmes écrits, tant la discussion avec l'examinateur est indissociable de l'énoncé.

Les exercices principaux ont été choisis de sorte que, dans la mesure du possible, les critères suivants soient respectés :

– originalité : ce ne sont pas des redites d'exercices classiques. En particulier, certains exercices – environ la moitié – sont nouveaux et créés pour l'occasion (mais les autres ne figurent pas, à notre connaissance, dans des recueils d'exercices classiques ou posés récemment aux oraux) ;

– difficulté progressive afin de stimuler la discussion : les exercices sont difficiles, au sens où ils ne sont pas nécessairement conçus pour être entièrement résolus en un temps aussi limité (la résolution complète peut être délicate même pour une mathématicienne ou un mathématicien de profession) et le jury en est conscient, mais la recherche initiale peut débuter de manière autonome (étude de cas particuliers, résultats intermédiaires accessibles, etc.). Il y a souvent plusieurs solutions possibles pour chaque exercice. Enfin, les énoncés sont courts afin de minimiser le temps d'adaptation à l'exercice ;

– respect du programme : nous sommes vigilants quant au respect des programmes de 2013 de mathématiques de MPSI et de MP. Sauf erreur de notre part, les énoncés ne font intervenir que des notions au programme, ils couvrent un très large spectre du programme, ils peuvent être résolus dans le respect du programme, et les discussions n'ont lieu que dans le cadre du programme (sauf brièvement si le candidat ou la candidate mentionne des éléments hors-programme, cf. Section 2).

Insistons sur le fait que l'objectif principal n'est pas nécessairement d'arriver au bout de l'exercice, et que la note finale n'est ni une fonction croissante, ni une fonction simple, de l'avancement de l'exercice (voir Section 2 pour davantage de précisions). En deux mots, on pourrait dire qu'il est attendu que les candidates et candidats cherchent et explorent afin de comprendre et d'avancer vers la solution, sans forcément la trouver à la fin de l'oral.

Les exercices principaux ont été posés dans un ordre aléatoire établi avant le début des oraux (la préparation des exercices a duré une demi-année, et le choix final ainsi que leur formulation ont été obtenus après deux demi-journées de réunion avant le début des oraux). L'éventuel deuxième exercice a été généralement choisi en fonction du premier exercice pour maintenir un équilibre (thématique/difficulté/abstraction/technique) dans les planches. Chaque exercice a été donné au maximum deux fois à la suite. Si besoin est, précisons qu'au moment de l'oral le jury ne connaît bien entendu ni les notes de l'écrit, ni le lycée de provenance de la candidate ou du candidat.

Nous avons choisi les critères établis au-dessus dans le choix des sujets afin de pouvoir évaluer au mieux les candidates et candidats compte tenu de la vocation de l'ENS Paris (voir en particulier Section 2 pour les critères d'évaluation) :

L'école dispense une formation d'excellence par la recherche à ses élèves et à des étudiants se destinant aux différents métiers de l'enseignement et de la recherche dans l'espace européen de l'enseignement supérieur et de la recherche. Elle concourt aussi à la formation par la recherche des cadres supérieurs de l'administration et des entreprises françaises et européennes.

(Décret n° 2013-1140 du 9 décembre 2013 relatif à l'Ecole normale supérieure)

Compte tenu du format de l'épreuve, les critères précédents nous semblent donner un compromis entre deux visions opposées, qu'on pourrait décrire de manière un peu caricaturale : soit poser des exercices plus ou moins classiques, éventuellement déjà connus par certaines candidates et candidats, soit des exercices « infaisables » ou « à astuces » ou faisant intervenir des notions plus ou moins avancées hors programme brisant l'équité du concours. La difficulté évidemment consiste à maintenir à la fois l'originalité et l'équité, qui à nos yeux sont les pierres angulaires de ce concours.

Mais, au delà de l'aspect « concours », il s'agit également de poser des questions stimulantes, parfois issues de sujets de recherche actuels, permettant de prendre plaisir à faire et à discuter de belles mathématiques variées.

Lieu de l'épreuve. Les oraux de cette épreuve se sont déroulés à l'ÉNS Paris au 45 rue d'Ulm, soit en salle T14, soit en salle W (remplacée par la salle T19 pendant deux jours de canicule), voir Figure 2. La salle T14 était plus petite, mais disposait d'un climatiseur. Les oraux ont eu lieu pendant quatre semaines (correspondant aux quatre séries d'admissibles), du 17 juin au 14 juillet. Nous avons interrogé les jeudi, vendredi et samedi (et exceptionnellement le dimanche 14 juillet), à raison de 6 candidates ou candidats (en moyenne) par jour et par examinateur.

Nous tenons à remercier l'ensemble du service concours et les secrétaires pédagogiques pour leur aide dans l'organisation et pour le bon déroulement des oraux.

Public. L'épreuve est publique, dans la limite de l'espace d'accueil disponible, mais il est d'usage que le public sollicite l'accord de la candidate ou du candidat afin de ne pas le gêner. Le public était placé de part et d'autre du tableau (à sa gauche et à sa droite, parallèle aux murs). Par ailleurs, qu'il assiste à une épreuve ou qu'il reste dans les couloirs pendant une épreuve, le public doit respecter un silence total **et ne manifester aucune réaction** jusqu'à la sortie de la candidate ou du candidat.

En tant qu'examinateurs, nous encourageons vivement les futures candidates et candidats, enseignantes et enseignants à venir assister aux épreuves orales.

Figure 2 – Salles d'interrogation : à gauche, la salle W : à droite, la salle T14.

2 Choix des critères d'évaluation

L'objectif de l'épreuve est d'évaluer, outre l'organisation des connaissances, la capacité d'analyse et l'imagination des candidates et candidats face à un problème original, compte tenu de la vocation de l'ENS Paris précisée précédemment.

Critères choisis. À cet effet, nous avons défini en amont des oraux plusieurs critères :

- maîtrise du cours ;
- capacité à se rendre compte des incohérences et à se corriger ;
- autonomie sur les points plutôt standards ;
- autonomie sur les points plutôt délicats ;
- réactivité aux indications,

qui nous permettaient de donner une note « théorique » sur 20, qui nous servait d'indicateur (de comparaison et de justesse) pour la note finale sur 20, issue de nos ressentis lors de l'oral. Ces critères proviennent d'une volonté de dépasser en quelque sorte une notation uniquement « concours », qui en termes un peu caricaturaux consisterait à comparer les performances les unes aux autres afin d'établir un ordre total.

Aussi, plutôt que d'avoir une approche « punitive » (qui serait par exemple de sanctionner très sévèrement une faible maîtrise d'un point précis du cours), ou d'opposer l'esthétique à la technique ou la rigueur à l'intuition, nous avons valorisé des points indépendants tels que :

- prendre le temps de comprendre les phénomènes en jeu, en traitant par exemple des cas particuliers pertinents ;
- expliquer clairement, précisément et pédagogiquement sa pensée ;
- proposer et explorer une piste de recherche qui semble judicieuse ;
- s'intéresser aux aspects de modélisation dans les sujets qui s'y prêtent ;

– avoir une idée originale adaptée au problème ;
– s'engager dans des calculs laborieux avec recul (c'est-à-dire, en sachant estimer si l'approche a des chances d'aboutir).

Ainsi, venir à bout de l'exercice n'est pas l'objectif principal, et il n'y a pas une unique manière d'obtenir une très bonne note. Insistons sur le fait que la note est fonction de nos ressentis et des critères que nous avons choisis, et reflète la performance durant un oral de 55 minutes : elle n'est en aucun cas un jugement de valeur objectif (qui n'a pas vraiment de sens) sur la qualité d'une ou d'un candidat. Précisons aussi que ces choix n'engagent que nous, les examinateurs actuels de ce concours, et qu'ils pourront peut-être légèrement évoluer à l'avenir.

Ces choix nous ont permis, nous semble-t-il, de valoriser une diversité de qualités requises liées au champ de l'enseignement supérieur et de la recherche, compte tenu d'une part de la variété des caractères et socialisations des candidates et candidats et d'autre part de la variété de manières d'utiliser, de faire ou d'enseigner des mathématiques avec succès.

Obtention de la note finale. La note finale sur 20 a été obtenue à partir d'un long processus. Tout d'abord, l'ensemble de l'oral est retranscrit sur un cahier par l'examinateur. Après le passage successif de deux personnes, 45 minutes étaient réservées à une discussion du jury amenant à une note provisoire. Nous avons stabilisé ces notes à l'issue de chaque journée ainsi qu'à l'issue de chaque série, et nous avons effectué une dernière harmonisation d'une journée à l'issue de tous les oraux.

Précisions sur les critères. Détaillons de manière plus précise les attentes du jury par rapport aux critères évoqués précédemment.

– Maîtrise du cours. La connaissance et la maîtrise des résultats et des démonstrations exigibles du programme, assez vaste, est *fondamentale*. Souvent, à un moment lors de l'oral, l'examinateur demande de détailler une étape du raisonnement jusqu'à isoler un résultat du cours, dont l'énoncé peut être demandé à être explicitement écrit au tableau et dont la preuve peut également être demandée. Le fait de poser des questions de cours est quasi-systématique, et n'augure en rien un oral réussi ou non.
– Capacité à se rendre compte des incohérences et à se corriger. Une erreur (non grossière) en tant que telle n'est pas pénalisée (le jury est conscient de la difficulté de l'épreuve sans préparation et des impacts du stress). La candidate ou le candidat se rend parfois compte seul de l'erreur et corrige (ce qui est positif), sinon l'examinateur est amené à l'aider en ce sens, et c'est sa réaction qui est évaluée. Le cas échéant, le jury s'attend à ce que la candidate ou le candidat trouve précisément l'endroit où l'erreur a été commise, en fasse éventuellement une analyse rapide (se rende compte par exemple qu'une hypothèse supplémentaire était peut-être implicitement supposée, ou donne un contre-exemple, etc.) puis se corrige.
– Autonomie sur les points plutôt standards. Une des premières étapes de recherche de la quasi-totalité des exercices posés passe par des applications relativement directes du cours (si ce n'est pas le cas, l'examinateur posera à un moment ou un autre des questions de ce type). La maîtrise des techniques très proches du cours est ainsi évaluée.

– Autonomie sur les points plutôt délicats. Le jury évalue les réactions des candidates et des candidats dans le contexte d'une situation mathématique nouvelle, en particulier leur autonomie et leur prise d'initiative. Il s'agit, après un temps de réflexion, de pouvoir esquisser une ou plusieurs pistes ou stratégies et d'évaluer leur pertinence (quitte à se lancer dans une piste et se rendre compte finalement qu'elle n'aboutit peut-être pas).
– Réactivité dans la discussion. La capacité à avoir un dialogue mathématique, en comprenant et en réagissant aux remarques de l'examinateur, est évaluée. En particulier, il est préférable d'être ouvert aux conseils de l'examinateur, sans chercher son acquiescement.

Comme indiqué plus haut, le premier exercice était souvent, mais pas systématiquement, interrompu 10 ou 15 minutes avant la fin de l'oral pour aborder une autre thématique. L'abandon ou son non abandon n'indiquent ainsi également en rien un oral réussi ou non. Plus généralement, la perception qu'a la candidate ou le candidat de l'oral et pendant l'oral est souvent très imparfaite : comme dit explicitement au début de l'oral, c'est normal s'il y a des points délicats et nous encourageons les candidates et candidats à rester concentrés et motivés jusqu'au bout de l'oral (il est tout à fait possible d'obtenir une très bonne note en ayant bloqué au tout début).

Enfin, mentionnons qu'il est bien sûr agréable pour le jury d'avoir en face de lui des candidates et candidats qui sont à l'aise à l'oral, qui prennent la parole et qui expliquent par eux-mêmes l'état de leurs réflexions. Mais l'attitude des candidates et candidats qui pourraient être stressés ou réservés en début d'oral n'est absolument pas pénalisée : le jury, toujours bienveillant, essaye de les mettre en confiance pour qu'ils puissent également exprimer toutes leurs qualités.

Quelques conseils concernant l'épreuve. Les candidates et candidats que nous avons interrogés sont globalement très bien préparés à l'épreuve. Nous donnons ici quelques conseils généraux, que nous espérons constructifs, compte tenu du format de l'épreuve.

– Bien qu'il ait été explicitement précisé qu'il y aura cinq à dix minutes de réflexion individuelle sans intervention du jury, un certain nombre de candidats et de candidates prennent la parole sitôt l'exercice recopié et engagent la discussion avec l'examinateur, puis pendant l'oral réfléchissent à voix haute sans laisser aucun blanc. Cette attitude ne nous semble pas bien adaptée à cette épreuve : en effet, si, en tant que telle, elle n'est bien entendu ni pénalisée ni valorisée, nous avons constaté que ces candidates et candidats ont souvent tendance à proposer une succession de pistes différentes à la chaîne, ne prenant pas le temps de la réflexion, cherchant l'acquiescement de l'examinateur et commettant des erreurs sans les corriger, ce qui finalement les dessert. Le fait que le silence s'installe pendant quelques minutes n'est en aucun cas un problème, bien au contraire. Inversement, plusieurs candidates et candidats restent muets aux sollicitations de l'examinateur (de type *Qu'est-ce que vous embête ? Qu'est-ce qui vous bloque ?*), rendant la discussion délicate, ce qui finalement les dessert aussi. Il s'agit donc de trouver un équilibre permettant une réflexion et une discussion optimales.
– Dans le feu de la discussion, un nombre non négligeable de candidates et de candidats sont débloqués et concluent la résolution de l'exercice trop rapidement à l'oral, en passant trop rapidement sur des points délicats ou en faisant des erreurs. Il ne faut pas hési-

ter à prendre le temps de la réflexion ou le temps de détailler le raisonnement au tableau. De même, lorsque des calculs assez poussés apparaissent, il vaut mieux éviter de se précipiter et d'effectuer régulièrement des vérifications de cohérence (par exemple, si une sommation $\sum_{i=1}^{n}$ intervient, on peut vérifier que pour $i = 1$ et $i = n$ tout est cohérent).

– Nous conseillons d'éviter d'utiliser des notions hors-programme : pour quelques candidates ou candidats qui les ont invoquées, le jury vérifie rapidement la maîtrise réelle de ces sujets (devenant ainsi plus exigeant).

– Certaines parties du raisonnement peuvent faire penser (parfois à juste titre, parfois non) à des situations déjà rencontrées. Il faut alors faire attention à ne pas se précipiter en utilisant des demi-souvenirs qui ne sont en fait pas adaptés.

– La gestion du tableau est globalement très bien maîtrisée. L'idéal est d'écrire l'énoncé de l'exercice en haut à gauche, en laissant suffisamment de place disponible. Plus généralement, il s'agit de trouver un compromis entre un brouillon et une copie, de sorte que les grandes étapes du raisonnement puissent être accessibles simplement en regardant le tableau. En particulier, on s'attend à ce que les éléments essentiels de logique s'y retrouvent (introduction des variables, quantificateurs, etc.). Enfin, nous déconseillons aux candidates et candidats d'effacer intempestivement des éléments partiels corrects alors qu'il reste de la place disponible (ils pourraient servir, on ne sait jamais !).

Quelques conseils, à destination des candidates et candidats, concernant l'abord d'exercices originaux. Il n'y a bien sûr pas de « recette miracle » permettant la résolution d'exercices difficiles et originaux. Mais les candidates et candidats peuvent se préparer pour développer « l'intuition » mathématique requise pour aborder ce type d'exercices. Notre conseil principal est le suivant :

faire confiance et travailler avec vos enseignantes et enseignants, qui vous suivent tout le long de l'année, et qui sont les plus à mêmes de vous conseiller.

Donnons également quelques conseils qui pourraient être utiles (indépendamment des résultats aux concours !) :

– la connaissance du cours est fondamentale, ainsi qu'une petite technicité calculatoire (en particulier il vaut mieux ne pas éviter les calculs rencontrés dans le cadre de la préparation) ;

– pour débuter la recherche d'exercices délicats, en fonction des sujets, il est souvent judicieux de commencer par des cas particuliers, d'ajouter éventuellement une hypothèse, de faire un dessin, etc. ;

– les colles sont un élément important dans la formation (à la fois du point de vue mathématique et en vue de préparer les épreuves orales), et ce dès le début de la première année ;

– dans le cadre d'un travail individuel, en abordant un exercice difficile, il nous semble préférable de prendre le temps de le chercher, et, avant de regarder sa solution, faire le bilan des différentes tentatives. Après avoir regardé la solution, il peut être profitable de procéder à une sorte de rétro-ingénierie en se demandant dans quelle mesure la solution pourrait être « naturelle » en décortiquant la succession des idées sous-jacentes.

Quelques maladresses. Les candidates et candidats que nous avons interrogés ont globalement commis peu d'erreurs « grossières ». Nous mentionnons ici quelques maladresses commises par un nombre non négligeable de candidates et candidats :

– l'hypothèse de la finitude du moment d'ordre 2 est souvent oubliée dans l'énoncé de la loi faible des grands nombres ;

– l'équivalence des normes a plusieurs fois été invoquée en dimension infinie ;

– écrire qu'un point est un centre de symétrie du graphe d'une fonction a parfois posé des difficultés ;

– en général, il n'est pas vrai que, dans un groupe fini commutatif, l'ordre du produit de deux éléments est égal au produit de leurs ordres ou de leur ppcm ;

– les questions suivantes ont pu causer des difficultés : pourquoi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour des matrices A, B de même taille ? Dans un espace vectoriel normé, pourquoi un sous-espace vectoriel de dimension fini est fermé ?

* * *

Pour conclure, compte tenu du déroulement et des modalités d'évaluation de l'épreuve, que nous avons essayé d'expliciter au maximum, compte tenu de l'ensemble des sujets posés ainsi que des éléments de discussion associés, nous espérons qu'il transparaît que certains facteurs menant à la réussite de cette épreuve, en particulier la capacité à aborder des situations mathématiques nouvelles, s'apprennent et se travaillent avec sérieux.

3 Analyse des notes

Nous avons interrogé 138 candidates et candidats déclarés admissibles à l'issue des épreuves écrites (parmi environ 1600 inscrites et inscrits). Trois épreuves comptent pour l'admissibilité : pour l'option maths-physique, il s'agit de Physique (coefficient 6, durée 4h), Mathématiques C (coefficient 4, durée 4h) et Mathématiques D (coefficient 6, durée 6h) et pour l'option maths-physique-info il s'agit de Physique (coefficient 4, durée 4h), Informatique A (coefficient 6, durée 6h), Mathématiques D (coefficient 6, durée 6h). Les épreuves de Physique et d'Informatique A sont communes avec les ENS de Lyon, Paris-Saclay et Rennes, l'École Polytechnique ; l'épreuve de Mathématiques C est commune avec les ENS de Lyon, Paris-Saclay et Rennes.

Notes de l'épreuve. Les notes s'étalent entre 10/20 et 20/20 (voir Figure 1 pour l'histogramme de notes), avec une moyenne de 14.95/20, une médiane de 15/20 et un écart-type de 2.61. Le jury a été enchanté par les performances des candidates et candidats. Nous les félicitons, ainsi que leurs enseignantes et enseignants, pour le travail et l'effort effectué.

Compte tenu des critères explicités précédemment, la moyenne plutôt élevée est le reflet à la fois d'un très haut niveau et d'une très bonne préparation des candidates et candidats admissibles. Ceci est d'ailleurs probablement vrai de nombreuses candidates et candidats non admissibles : nous regrettons le fait de ne pas avoir pu interroger d'autres personnalités riches de potentiel et d'originalité.

Nous n'avons pas assisté à des performances jugées mauvaises ou éliminatoires. Pour cette raison, il n'y a pas eu, cette année, de note inférieure à 10/20. Ceci explique également le fait que l'écart-type diminue légèrement par rapport à l'année dernière (qui était de 2.8). Compte tenu de ce que nous avons vu, il ne nous a pas semblé pertinent de gonfler artificiellement les écarts entre les notes.

Même s'il est parfois difficile de classifier des exercices transverses, les notes moyennes sur des exercices d'algèbre et d'analyse sont identiques, et la note moyenne sur des exercices principaux de probabilités est un peu plus élevée. Cette différence s'explique probablement par plusieurs facteurs : d'une part par un nombre conséquent de bonnes ou très bonnes performances sur des exercices de probabilités, et d'autre part par le fait que nous avons tenu compte de la difficulté de certains exercices de probabilités dans la notation.

Notes liées à la liste principale et à la liste complémentaire. Les listes principale et complémentaire sont établies à partir de 10 épreuves : les 3 épreuves écrites d'admissibilité précédentes, auxquelles s'ajoutent 2 épreuves écrites ne comptant que pour l'admission (Français, durée 4h, coefficient 8 et Langue vivante étrangère, durée 4h, coefficient 3) et 5 épreuves orales : Mathématiques Ulm (coefficient 30), mathématiques Ulm-Lyon-Cachan-Rennes (coefficient 15), TIPE (coefficient 8), Lange vivante (coefficient 3) et soit Physique Ulm (coefficient 25) pour l'option maths-physique, soit Informatique Ulm (coefficient 25) pour l'option maths-physique-info. Les épreuves « Ulm » sont spécifiques, au sens où elles ne comptent que pour l'ENS Paris.

Les 39 candidates et candidats sur liste principale ont obtenu, à l'épreuve orale Mathématiques Ulm, 17.2 en moyenne, avec une médiane de 17.5 et un écart-type de 2.07, avec des notes variant de 12.5 à 20. Les 61 candidates et candidats sur liste complémentaire ont obtenu 15.1 en moyenne, avec une médiane de 15, un écart-type de 1.76, et avec des notes variant de 10.5 à 20. Le rang moyen des candidates et candidats ayant obtenu au moins 16/20 est 36.

Quelques statistiques générales. Nous concluons cette partie par quelques statistiques générales liées aux listes principales et complémentaires (en gardant à l'esprit que les pourcentages sont calculés sur des effectifs variables, certains relativement faibles).

On trouve respectivement environ 31%, 26% et 28% de candidates et de candidats issus d'une classe préparatoire hors Île-de-France au sein de respectivement la liste principale, des deux listes et des admissibles (nous ne disposons pas du pourcentage inscrites et d'inscrits au concours de l'ENS Paris issus d'une classe préparatoire hors Île-de-France).

On trouve respectivement environ 21%, 9% et 7% de femmes au sein respectivement des 39 personnes de la liste principale, des 100 personnes des deux listes (principale et complémentaire) et des 138 admissibles (si besoin est, précisons que la notation est évidemment identique). Par ailleurs, il y a eu 17.8% d'inscrites parmi les 1720 personnes inscrites au concours de l'ENS Paris.

4 Exercices posés

Chaque planche contient un exercice « principal », qui était souvent, mais pas systématiquement, interrompu 10 ou 15 minutes avant la fin de l'oral pour aborder une autre thématique (c'est pourquoi chaque planche contient souvent 2 exercices).

Chaque exercice a été donné au maximum deux fois à la suite. Les exercices ont été posés dans un ordre aléatoire établi avant le début des oraux.

Les exercices principaux ne sont pas nécessairement conçus pour être entièrement résolus en un temps aussi limité. Il s'agit d'un point important à prendre en compte dans la préparation et dans la recherche d'un exercice original. Pour cette raison, nous publions également les éléments de discussion abordés lors de l'oral.

Dans le contexte de l'épreuve orale, nous insistons sur le fait que ces sujets ne doivent pas être considérés comme des problèmes écrits, tant la discussion avec l'examinateur est indissociable de l'énoncé.

* * *

Planche 1.
Exercice. On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de « piles » soit égal au double du nombre de « faces ». Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

* * *

Planche 2.
Exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ des nombres réels différents. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $\det(A + t_i B) = 0$

(b) il existe V, W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(V) \subset W$, $B(V) \subset W$ et $\dim W < \dim V$.

Deuxième exercice. On considère

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$$

deux séries entières à coefficients strictement positifs de rayons de convergence respectifs r_f et r_g. On suppose que $0 < r_f < r_g$ et que la suite f_n/f_{n+1} converge. Montrer qu'il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $n \geqslant 1$, on a $g_n \leqslant a f_n e^{-bn}$.

* * *

Planche 3.
Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et notons

$$P(X) := \det(XI_n - A) = X^n + c_1 X^{n-1} + c_2 X^{n-2} + \cdots + c_{n-1} X + c_n$$

son polynôme caractéristique.

1) En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines de P, calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{P(X)}{X-\lambda_k}$ de deux manières différentes.

2) Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \mathrm{tr}(A) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^3) & \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^{k-1}) & \mathrm{tr}(A^{k-2}) & \cdots & \cdots & \mathrm{tr}(A) & k-1 \\ \mathrm{tr}(A^k) & \mathrm{tr}(A^{k-1}) & \cdots & \cdots & \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) \end{vmatrix}.$$

Deuxième exercice. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(1) = 1$ et $f(x)f(y) \leqslant f(xy)$ pour tous $x, y \geqslant 0$.

* * *

Planche 4.

Exercice. Soient $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices telles que $A_j^2 = A_j$ pour $j = 1, \ldots, k$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{k} (n - r(A_j)) \geqslant r(I_n - A_1 \cdots A_k)$$

où I_n est la matrice identité et $r(A)$ désigne le rang de A.

Deuxième exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

L'exercice additionnel suivant a parfois été posé : montrer que le polynôme $n + (n-1)z + (n-2)z^2 + \cdots + z^{n-1}$ n'a pas de zéro dans le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

* * *

Planche 5.

Exercice. Soit G un groupe, $\delta > 0$ et $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction telle que

$$\forall x, y \in G, \qquad |f(xy) - f(x)f(y)| \leqslant \delta.$$

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in G$ ou $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in G$.

Trouver la plus petite valeur de C possible *(cette question a parfois été posée à l'oral une fois l'existence de C démontrée).*

Deuxième exercice. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions dérivables telles que $\|f_n'\|_\infty \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. On suppose que f_n converge simplement vers g. Montrer que g est continue.

L'exercice additionnel suivant a parfois été posé : Peut-on trouver un sous-groupe strict de $(\mathbb{Q}, +)$ non monogène ?

* * *

Planche 6.
Exercice. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ non constante telle que pour tout $n \geqslant 0$ et $x \in [0,1]$, on a $f^{(n)}(x) \geqslant 0$. Montrer que f ne peut s'annuler qu'au plus une fois. Montrer que f est développable en série entière autour de tout point de $]0,1[$ *(cette deuxième question a parfois été posée une fois la première question résolue)*.

Deuxième exercice. Soit G un groupe. A-t-on G fini si et seulement si le nombre de sous-groupes de G est fini ?

* * *

Planche 7.
Exercice. Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients positifs tels que (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée f. Montrer que f est C^∞.

* * *

Planche 8.
Exercice. Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall a > 1, \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathbb{P}(X_1 \geqslant ax)}{\mathbb{P}(X_1 \geqslant x)} = 0.$

(2) il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels strictement positifs telle que $b_n \to \infty$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i}{b_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Deuxième exercice. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ telle que la somme des entrées de A vaut r et telle que $\min\{k \geqslant 1 : A^k = \mathrm{Id}\} = 6$.

* * *

Planche 9.
Exercice. Pour une suite $(n_i)_{i\geqslant 1}$ d'entiers positifs, on considère la suite $(x_i)_{i\geqslant 1}$ définie par $x_1 = 2 + n_1$ et, pour $i \geqslant 2$,

$$x_i = 2 + \frac{n_1}{2 + \frac{n_2}{\cdots + \frac{n_i}{2}}}.$$

Dans le cas où la suite (x_i) est convergente, on note $[n_1, n_2, \dots]$ la limite de cette suite.

Soit A l'ensemble des nombres réels x qui sont de la forme $x = [n_1, n_2, \dots]$ pour une suite $(n_i)_{i\geqslant 1}$ avec $n_i \in \{5, 20\}$ pour tout i.

Déterminer $\min(A)$ et $\max(A)$. Déterminer A *(question posée une fois la question précédente résolue)*.

Deuxième exercice. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,i}a_{j,j} \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \lambda_i\lambda_j.$$

* * *

Planche 10.
Exercice. Déterminer le nombre de fois qu'il faut, en moyenne, lancer une pièce successivement et indépendamment au hasard pour observer une suite d'un nombre impair de « piles » suivi d'un « face ».

Deuxième exercice. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur. Soit $H : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par $H(u) = \frac{1}{2}(u \circ p + p \circ u)$. Est-ce que H est diagonalisable ?

* * *

Planche 11.
Exercice. Montrer qu'il n'est pas possible de partitionner le plan $\mathbb{R}^2$ en une union disjointe de cercles de rayon strictement positif.

La question suivante a été parfois posée lorsque la première question a été traitée : par définition, une *triade* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à l'union de trois segments reliant le point $(0,0)$ aux points $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Montrer que $\mathbb{R}^2$ ne peut pas être partitionné en une union disjointe de triades.

Deuxième exercice. Pour $n \geqslant 3$, on note u_n la plus petite solution de l'équation $x = n\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier u_n.

* * *

Planche 12.
Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont la restriction sur toute droite de $\mathbb{R}^n$ est monotone (c'est-à-dire, pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(tu+v)$ est monotone). Montrer qu'il existe une forme linéaire $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction monotone $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = h \circ \phi$.

Deuxième exercice. Calculer

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{x}{n}\big)^n\Big)^{\frac{1}{x}}.$$

* * *

Planche 13.
Exercice. Soit $A = \{0,1\}^2$ contenant les quatre points $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme ℓ_1 qu'on note $|\cdot|$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $f : A \to \mathbb{R}^n$ une application telle que

$$\forall x, y \in A, \qquad \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant |x-y|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe deux points $a, b \in A$ qui vérifient

$$\left\|f(a) - f(b)\right\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|a-b|.$$

(2) *La question suivante n'a pas été posée :* on considère maintenant l'ensemble B constitué des points $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa norme ℓ_1 qu'on note $|\cdot|$. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $f : A \to \mathbb{R}^n$ une application telle que

$$\forall x, y \in A, \qquad \left\|f(x) - f(y)\right\| \leqslant |x-y|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe deux points $a, b \in B$ qui vérifient

$$\left\|f(a) - f(b)\right\| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}|a-b|.$$

Deuxième exercice. Trouver

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{A}\int_1^A A^{\frac{1}{x}}\, dx.$$

* * *

Planche 14.

Exercice. Soient $(a_i)_{i\geqslant 1}$, $(b_i)_{i\geqslant 1}$ et $(c_i)_{i\geqslant 1}$ trois suites de nombres réels positifs tels que pour tout $n \geqslant 1$, on a $a_{n+1} \leqslant a_n - b_n + c_n$. On suppose que la série de terme général c_n converge. Montrer que la suite (a_i) converge.

Deuxième exercice. Soit $P(z) = (z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$ avec α_i des nombres complexes avec $|\alpha_i| < 1$. On suppose que $|P(z)| \leqslant 1$ pour tout z de module 1. Trouver P.

* * *

Planche 15.

Exercice. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres entiers strictement positifs, strictement croissante. On pose $A(x) = \mathrm{Card}(\{k \geqslant 1 : a_k \leqslant x\})$. A-t-on

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{a_k} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{A(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\,?$$

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice sans valeurs propres multiples et $p \geqslant 2$ un entier. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$XA - AX = X^p.$$

* * *

Planche 16.
Exercice. On pose $p_0 = 1$, $p_1 = 1$ et pour $n \geqslant 2$,

$$p_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n.$$

Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\frac{\pi}{6}\right)^n.$$

Deuxième exercice. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On note $f_P : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par $f_P(Q) = \sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)}$ où $Q^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de Q. Est-ce que f_P est un isomorphisme ? Est-ce que $P \mapsto f_P$ est un isomorphisme ?

* * *

Planche 17.
Exercice. Soit $f : [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x f(3x^2 - 2x^3) dx = 2 \int_0^1 x f(3x^2 - 2x^3) dx.$$

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices. Montrer que

$$\det(A)\det(B) = \sum_{j=1}^{n} \det(A_j)\det(B_j)$$

où la matrice A_j est obtenue à partir de A en remplaçant la premième colonne de A par la j-ième colonne de B, et B_j est obtenue à partir de B en remplaçant la j-ième colonne de B par la première colonne de A.

* * *

Planche 18.
Exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations d'un ensemble à n élèments. Pour une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{Card}(\{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\})$ le nombre d'inversions de σ.

(1) Montrer que $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} x^{\mathrm{inv}(\sigma)} = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1})$.

(2) On note $f(n)$ le nombre de permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $\mathrm{inv}(\sigma)$ est divisible par $n+1$. Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p avec $f(p-1) > \frac{(p-1)!}{p}$, et une infinité de nombres premiers p avec $f(p-1) < \frac{(p-1)!}{p}$.

Deuxième exercice. Soit $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction continue qui vérifie $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx < \infty$. Trouver

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x e^t f(t) dt}{e^x}.$$

* * *

Planche 19.
Exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f(A, B) = AB - BA$. Soit $L \in \mathcal{M}_{n(n-1)^2,n}(\mathbb{C})$ la matrice par blocs

$$L = \begin{pmatrix} f(A,B) \\ f(A,B^2) \\ \vdots \\ f(A^i,B^j) \\ \vdots \\ f(A^{n-1},B^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B ont un vecteur propre commun si et seulement si $\mathrm{rg}(L) < n$.

Montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \; : \; A \text{ et } {}^tA \text{ n'ont pas de vecteur propre commun}\}$ est un ouvert dense *(question posée une fois la question précédente résolue)*.

Deuxième exercice. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $f(f'(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Y a-t-il une fonction $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie la même équation pour $x > 0$?

L'exercice supplémentaire suivant a parfois été posé. Soit p_n le n-ième nombre premier. Est-il possible de factoriser le polynôme

$$A_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n$$

en un produit de deux polynômes à coefficients entiers de degré au moins 1 ?

* * *

Planche 20.
Exercice. Soit $s > 0$ un nombre réel. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$, $u_2 = s$ et $u_{n+2} = \frac{u_n u_{n+1}}{n}$ pour $n \geqslant 0$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Deuxième exercice (posé sous différentes formes). Soit $n \geqslant 2$ un entier. Trouver le plus petit entier $N \geqslant 1$ tel que l'assertion suivante soit vraie : si $A, B, X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices telles que A et B sont inversibles, et si $A^k X = A^k Y$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant N$, alors $X = Y$.

* * *

Planche 21.
Exercice. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi, telles que

$$\mathbb{P}(X + Y \geqslant x) \underset{x \to \infty}{\sim} 2\mathbb{P}(X \geqslant x).$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(X \geqslant x) \underset{x \to \infty}{\sim} \mathbb{P}(X \geqslant x - 1).$$

Deuxième exercice. Pour un entier $n \geqslant 1$, on pose $f(n) = (-1)^{g(n)}$, où $g(n)$ est le nombre de diviseurs premiers de n comptés avec multiplicité (par exemple $g(5^2) = 2$). Calculer, pour $n \geqslant 1$,

$$\sum_{d|n} f(d).$$

* * *

Planche 22.
Exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $p \in [0, 1]$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où les entrées sont indépendantes de même loi, donnée par $\mathbb{P}(A_{i,j} = 1) = p$ et $\mathbb{P}(A_{i,j} = 0) = 1 - p$. Calculer $\mathbb{E}[\det(A)]$ et $\mathbb{E}[\det(A)^2]$.

Deuxième exercice. Soit $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $y'(t) = a(t) + b(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. On suppose que a est uniformément continue, que b est continue de limite nulle en $+\infty$ et que y a une limite en $+\infty$. Montrer que $y'(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

* * *

Planche 23.
Exercice. Soit $(X_i)_{i \geqslant 0}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On fixe $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & t & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k X_k \leqslant t\right) \end{array}$$

est continue.

* * *

Planche 24.
Exercice. Soit G un groupe et $M : G \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- M est un quasi-morphisme si $\sup_{g,h \in G} |M(g) + M(h) - M(gh)| < \infty$;
- M est un quasi-caractère si $\forall g \in G, \forall n \in \mathbb{Z}$, $M(g^n) = nM(g)$.

Supposons que M soit un quasi-morphisme. Montrer qu'il existe une unique fonction $Q : G \to \mathbb{R}$ qui soit à la fois un quasi-morphisme et un quasi-caractère telle que

$$\sup_{g \in G} |M(g) - Q(g)| < \infty.$$

* * *

Planche 25.
Exercice. On définit récursivement les suites (P_i) et (Q_i) de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ comme suit. Les fonctions P_0 et Q_0 sont nulles et, pour $i \geqslant 1$:

$$P_i(x) := \left(1 - x + \int_0^x Q_{i-1}(z)dz\right)^2, \qquad Q_i(x) := 1 - \left(1 - \int_0^x P_{i-1}(z)dz\right)^2.$$

Calculer

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \left(1 - x + \int_0^x Q_k(z)dz\right)^3 dx.$$

Deuxième exercice. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) P n'a pas de racine réelle

(2) pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det P(A) = 0$ implique $P(A) = 0$.

* * *

Planche 26.
Exercice. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit que $f : E \to F$ est une isométrie si pour tout $x, y \in E$ on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. L'exercice était une discussion autour de la question suivante : est-ce que f est forcément linéaire ?

Les sous-questions suivantes ont été abordées : si $f(0) = 0$ et $E = F = \mathbb{R}$? Si $f(0) = 0$? Si $f(0) = 0$ et E, F sont euclidiens ? Si $f(0) = 0$, $E = F$ et f surjective ? Dans ce dernier cas : justifier qu'il suffit de montrer que f conserve les milieux. Ensuite, en posant $A(f) = \|f((x+y)/2) - (f(x) + f(y))/2\|$ construire une autre isométrie g telle que $f = f^{-1} \circ h \circ f$ avec h judicieusement choisie pour échanger x et y et calculer $A(g)$. Conclure.

* * *

Planche 27.
Exercice. Soient $a, r : [0, \infty[\to]0, \infty[$ deux applications continues. On suppose qu'il existe $\varepsilon, M > 0$ tel que $x - r(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant M$.

On considère une fonction continue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $[0, \infty[$, telle que

$$\forall x \geqslant 0, \qquad y'(x) = a(x)y(x - r(x)).$$

Montrer que

$$y(x) \exp\left(-\int_0^x a(t)dt\right)$$

converge vers une limite finie lorsque $x \to \infty$.

Deuxième exercice. Pour un groupe G, est-ce que G est fini si et seulement si tout sous-groupe de G est fini ? Est-ce que G est fini si et seulement si tout sous-groupe strict de G est fini ?

* * *

Planche 28.
Exercice. Pour $\lambda \geqslant 0$ on pose

$$A_\lambda = \{k \in \mathbb{N}^* : \text{le nombre de 9 dans } k \leqslant \lambda \times \text{le nombre de chiffres dans } k\}$$

ainsi que

$$S_\lambda = \sum_{a \in A_\lambda} \frac{1}{a}.$$

Étudier la convergence de S_λ.

Deuxième exercice. On considère deux matrices $A \in \mathcal{M}_{2019}(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et telles que $A^{2019} = B^{2019} = I$. On suppose que $\mathrm{Tr}(AB) = 2019$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

* * *

Planche 29.
Exercice. Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\det(A), \det(B) > 1$. On s'intéresse aux suites $v_0, v_1, v_2, \ldots$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ telles que $v_0 \neq 0$ et pour tout $i \geqslant 1$, on a $v_i = Av_{i-1}$ ou $v_i = Bv_{i-1}$.

Supposons que $AB = BA$. Montrer qu'il existe $v_0 \neq 0$ tel que toute telle suite commençant par v_0 est non-bornée.

Que se passe-t-il si on a $AB \neq BA$? *(cette deuxième question a parfois été posée une fois la question précédente résolue)*

Deuxième exercice. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe n réels deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n.$$

* * *

Planche 30.
Exercice. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que tous les coefficients de $(1 + X)^n P(X)$ sont strictement positifs.

La deuxième question suivante n'a pas été posée : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(x) > 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Montrer qu'on peut écrire $P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i (1 - X)^i (1 + X)^{k-i}$ avec $a_i \geqslant 0$ pour un certain $k \geqslant 1$.

Deuxième exercice. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, périodiques de période 1. Trouver

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) g(nx) dx$$

* * *

Planche 31.
Exercice. Soit $m \geqslant 1$. Trouver tous les nombres complexes $a_1, \dots, a_m$ de module égal à 1 tels que
$$\sum_{j=1}^{m} a_j^n$$
a une limite quand $n \to \infty$.

Deuxième exercice. On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne notée $\| \cdot \|$. Soient $e_1, \dots, e_n$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. On note $d_i = \|e_i\|$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit m un entier naturel entre 1 et n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) il existe un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ de dimension m tel que les projections orthogonales de $e_1, \dots, e_n$ sur W ont la même norme.

(2) pour $i = 1, \dots, n$, on a l'inégalité
$$d_i^2 \left(\sum_{j=1}^{n} d_j^{-2} \right) \geqslant m.$$

* * *

Planche 32.
Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière en tout point. On suppose que la suite $f^{(n)}$ converge simplement vers g lorsque $n \to \infty$. Trouver g.

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $B^2 = B$. Montrer que
$$\mathrm{rg}(AB - BA) \leqslant \mathrm{rg}(AB + BA).$$

L'exercice supplémentaire suivant a parfois été posé : trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ soit limite uniforme sur $[-1, 0]$ de polynômes à coefficients positifs.

* * *

Planche 33.
Exercice. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ et Id la permutation identité. On pose
$$g(n) = \max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \min\{k \geqslant 1 : \sigma^k = \mathrm{Id}\}.$$
Montrer que pour tout $k \geqslant 1$
$$\frac{g(n)}{n^k} \to +\infty$$
lorsque $n \to \infty$.

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions périodiques. On suppose que
$$\lim_{x \to \infty} (f_1(x) + \cdots + f_n(x)) = 0.$$
Montrer que $f_1 + \cdots + f_n = 0$.

* * *

Planche 34.
Exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et Id la permutation identité. On pose

$$g(n) = \max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \min\{k \geqslant 1 : \sigma^k = \mathrm{Id}\}.$$

Trouver les entiers $n \geqslant 1$ tels que $g(n)$ soit impair.

Deuxième exercice. Soit $f :]1/4, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $x^{f(x)} = f(x)$ pour tout $1/4 < x < 1$. Montrer que f est uniformément continue.

* * *

Planche 35.
Exercice. Soient $(X_i)_{i \geqslant 1}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour $\varepsilon > 0$, calculer

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} \right| > \varepsilon \,|\, S_{2n} = 0 \right).$$

Deuxième exercice. Trouver toutes les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) > f(x) + c \quad \text{et} \quad f''(x) > f'(x) + c.$$

* * *

Planche 36.
Exercice. On considère la suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $Y_n = |Y_{n-1} \pm Y_{n-2}|$, où les $\pm$ sont choisis aléatoirement de manière indépendante et uniforme. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\forall n \geqslant 1, Y_n \neq 0\right) \in]0, 1[.$$

La deuxième question suivante n'a pas été posée : que se passe-t-il si on considère la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $X_0 = 0$, $X_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $X_n = X_{n-1} \pm X_{n-2}$?

Deuxième exercice. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Trouver toutes les fonctions $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telles que $f(XY) \leqslant \min(f(X), f(Y))$ pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5 Éléments de discussion ou questions additionnelles

Nous donnons ici l'union des éléments de discussion qui ont pu avoir lieu. En particulier, sur chaque exercice, les candidates et candidats ont eu une partie des éléments ci-dessous (la discussion s'engage à partir des pistes explorées par les candidates et candidats).

Planche 1 (Éléments de discussion). Que se passe-t-il si maintenant on s'arrête quand le nombre de « piles » est égal au nombre de « faces » ? Essayez une représentation graphique (le but était d'amener le candidat ou la candidate à considérer par exemple $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec (X_i) i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$). Si on part de 2 et qu'on repasse par 0, par où est-on forcément passé ? Considérer pour $k \geqslant 1$ la quantité $\mathbb{P}(\text{partant de } k \text{ on touche } 0)$. Que dit la loi des grands nombres ? Quelle est l'idée de la démonstration ?

Planche 2 (Éléments de discussion). Pour le sens direct, comment pourrait-on construire V et W ? Pourquoi $\det(A) = 0$ ssi A n'est pas inversible ? Pourquoi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$? L'énoncé de l'exercice reste-t-il vrai si on considère n réels et non $n+1$? Que se passe-t-il si A et B commutent ?

Planche 3 (Éléments de discussion). Comment trouver les coefficients de $P(X)/(X - \lambda_k)$? Pourquoi $\mathrm{Tr}(A)$ est la somme des valeurs propres de A ? Quel est le lien entre polynôme minimal et polynôme caractéristique ? Est-ce que tous les coefficients (c_i) peuvent être positifs ? Décrire la règle de Cramer.

Plutôt que de considérer x^{2^n}, considérez $x^{1/2^n}$.

Planche 4 (Éléments de discussion). Commencer par le cas où $k = 2$. Que se passe-t-il si les matrices commutent deux à deux ? Quels sont les cas d'égalité dans ce cas-là ? Est-ce que $A_1 \cdots A_k$ peut ne pas être un projecteur ? Quelle est l'idée de la preuve du résultat de diagonalisation simultanée (question posée lorsqu'un candidat ou une candidate l'a utilisé) ? L'inégalité reste-t-elle vraie si les matrices ne sont plus des matrices de projection ?

Planche 5 (Éléments de discussion). Est-ce possible de trouver une telle fonction f qui ne vérifie pas $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x, y ; si G est fini, infini ? Partez de $f(xyx_n)$.

Donnez un exemple de groupe infini, de groupe infini non commutatif. Soit P un polynôme à valeurs entières sur $\mathbb{Z}$; est-ce que les coefficients de p sont forcément dans $\mathbb{Z}$? Un groupe G dont tous les éléments sont d'ordre fini est-il forcément fini ?

Planche 6 (Éléments de discussion). Donner un exemple de fonction satisfaisant aux conditions de l'exercice. Que vaut $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ sur $[0, x]$? Comment faire apparaître des termes de type $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n$? Quel est l'énoncé du théorème de Lagrange ? Quelles formules de Taylor connaissez-vous ? Donnez une idée de preuve de la formule de Taylor avec reste intégral. Si une fonction est développable en série entière autour de tout point de $\mathbb{R}$, est-ce que ces développements en série entière ont forcément un rayon de convergence infini ?

Planche 7 (Éléments de discussion). Est-ce qu'on peut trouver un exemple où f n'est pas un polynôme ? Si $P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} a_{n,k}x^k$, est-ce que $a_{n,0}$ converge ? Que dire de la suite $(a_{n,1})$? Pourquoi la convergence normale d'une suite de fonctions implique la convergence uniforme ? Calculez la dérivée de $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Donner un exemple d'une suite (f_n) qui converge simplement vers une fonction f non-continue. Qu'est-ce qui se passe si on suppose que f est un polynôme ? Donnez un exemple de groupe infini, de groupe infini non commutatif.

Planche 8 (Éléments de discussion)**.** Y a-t-il un résultat du cours avec une convergence similaire à (2) ? Donnez son énoncé et l'idée de démonstration. Donnez un exemple de variable aléatoire avec un moment d'ordre 1 fini mais avec un moment d'ordre 2 infini. Peut-on trouver une variable aléatoire avec un moment d'ordre 2 fini mais un moment d'ordre 1 infini ? Reformulez la condition (2) de l'énoncé. Donner des exemples des variables aléatoires qui vérifient ces conditions. Que vaut b_n dans ce cas ? Supposons que nous avons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} n\ln(1-a_n) = -\infty$. Que dire des termes de cette suite ?

Quelles informations un polynôme annulateur donne-t-il ?

Planche 9 (Éléments de discussion)**.** Comment faire pour construire le plus petit élément de A ? Est-ce que $[20, 5, 20, \ldots]$ est bien défini ? L'écriture $[n_1, n_2, \ldots]$ est-elle unique ?

Planche 10 (Éléments de discussion)**.** Est-ce qu'on s'arrête forcément ? Si X désigne ce nombre de fois, essayez de trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{P}(X = n)$. Donnez les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de H.

Planche 11 (Éléments de discussion)**.** Que se passe-t-il si on considère des disques ouverts au lieu de cercles ? Des disques fermés ? Donnez un exemple de suite de Cauchy non convergente (posée dans le cas où cette notion a été évoquée par un candidat ou une candidate). Quelles propriétés des compacts connaissez-vous ?

Montrer qu'il existe au plus un nombre dénombrable de triades disjointes dans $\mathbb{R}^2$.

Planche 12 (Éléments de discussion)**.** Quelles sont les propriétés d'une fonction f monotones sur les droites ? Commencer par le cas $n = 2$. Est-ce que f peut être monotone stricte sur toutes les droites ? Montrer qu'il existe des droites sur lesquelles f est constante. Justifiez que sur n'importe quel cercle on peut trouver deux points diamétralement opposés sur lesquels f prend la même valeur.

Donner un équivalent de la suite n^n.

Planche 13 (Éléments de discussion)**.** Peut-on avoir $\|f(x) - f(y)\| = |x - y|$ pour tous x, y ? Faites un dessin. Commencer par le cas $n = 2$. Que donne l'identité du parallélogramme pour un quadrilatère général ? (Question posée si cette identitié était mentionnée par un ou une candidate.) Que dire s'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ? Donner un exemple de deux normes équivalentes sur un espace vectoriel. Donner un exemple de deux normes non-équivalentes. Pourquoi un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est forcément fermé ?

Planche 14 (Éléments de discussion)**.** Réciproquement, est-ce que si pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_{n+1} \leqslant a_n - b_n + c_n$ et la suite (a_i) converge, alors la série de terme général c_n converge ?

Pour un degré $2, 3$ que se passe-t-il géométriquement ? Pour $P(z) = z^2 + az + b$, montrer que $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1 + |b|$. On peut supposer a et b réels dans un premier temps. Si dans une population, la taille moyenne est $2m$, que peut-on dire ?

Planche 15 (Éléments de discussion)**.** Si $n \sim \frac{a_n}{\ln(a_n)}$, trouvez un équivalent de a_n. Est-ce que $u_n \sim v_n$ implique $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$? Justifiez le fait que si une matrice est annulée par un polynôme scindé à racines simples, alors elle est diagonalisable.

Planche 16 (Éléments de discussion)**.** Y a-t-il une structure récursive dans (p_n) ? Comment obtenir une relation de récurrence ? Que cherche-t-on à calculer dans l'exercice ? Justifiez la dérivation terme à terme d'une série de fonctions dont la série et la série des dérivées convergent uniformément.

Planche 17 (Éléments de discussion)**.** Esquissez le graphe de $3x^2 - 2x^3$ sur $[-1/2, 3/2]$. Justifiez que $(1/2, 1/2)$ est un centre de symétrie. Appliquez la formule du changement de variable sur $[-1/2, 0]$. Donnez l'énoncé général (dans $\mathbb{R}$) de la formule du changement de variable ainsi que sa preuve.

Le résultat est-il vrai lorsque la matrice B est égale à la matrice identité ?

Planche 18 (Éléments de discussion)**.** Rappeler la définition de la signature. Pourquoi est-ce un morphisme de groupes ? Combien y a-t-il de transpositions, de 3-cycles dans $\mathcal{S}_n$? Combien y a-t-il de permutations dont le nombre d'inversions est pair ? Comment extraire les coefficients d'indices divisibles par 3 d'un polynôme ?

Planche 19 (Éléments de discussion)**.** Considérez d'abord le cas où le rang de L est nul. Comment trouver un espace stabilisé par A et B sur lequel A et B commutent ?

Planche 20 (Éléments de discussion)**.** Calculez les premiers termes. Qualitativement, que se passe-t-il si s est très petit ou s très grand ?

Est-ce que a_n équivalent à b_n implique $\ln(a_n)$ équivalent à $\ln(b_n)$? Quand est-ce que c'est le cas ? Pouvez-vous donner un contre-exemple dans le cas général ?

Planche 21 (Éléments de discussion)**.** Vérifiez qu'il suffit de démontrer le résultat pour x entier. Comparez $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant n-1)$. Si $1 \leqslant Y \leqslant n-1$, que X doit-il vérifier pour qu'on soit sûr que $X + Y \geqslant n$? Comment la fonction génératrice des moments permet-elle de déterminer l'espérence ?

Planche 22 (Éléments de discussion)**.** Pour le calcul de $\mathbb{E}(\det(A)^2)$ intervenant deux sommes sur les permutations, commencez par le calcul avec l'une des permutations égales à l'identité. Comment calculer $\sum_{\sigma \in D_k} \varepsilon(\sigma)$ où D_k désigne l'ensemble des permutations de longueur k sans point fixe ?

Planche 23 (Éléments de discussion)**.** Est-ce que F est continue en $1/(1-\alpha)$? Que se passe-t-il en un point de discontinuité de F ? Peut-on trouver une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{P}(Y = t_0) = 0.49$, $\mathbb{P}(Y = t_1) = 0.499$ et $\mathbb{P}(Y = t_2) = 0.4999$? Que donne la formule des probabilités totales avec X_0 ? Est-ce que tout nombre dans l'intervalle $[0, \frac{1}{1-\alpha}]$ s'écrit de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha^k$ pour $u_k \in \{0, 1\}$? Une telle écriture est-elle forcément unique ?

Planche 24 (Éléments de discussion)**.** Donner des exemples de quasi-morphismes et de quasi-caractères. Trouvez un lien entre $Q(g)$ et $Q(g^{-1})$. Est-ce qu'on peut deviner la valeur de $Q(g)$? Si $M(g^n)/n$ a deux valeurs d'adhérences avec deux extractions ϕ, ψ, que se passe-t-il si $\phi(n)$ est un multiple de $\psi(n)$?

Planche 25 (Éléments de discussion)**.** Que se passe-t-il en certaines valeurs particulières. Calculez $P_{i+1}(x) - P_i(x)$. Écrivez le théorème de convergence dominée. Admettons d'abord que la convergence soit uniforme. Quel est l'énoncé du théorème de point fixe pour un morphisme contractant (question posée si ce théorème était évoqué par un candidat ou une candidate).

Planche 26 (Éléments de discussion)**.** Justifiez que $f(x) - f(y)$ et $f((x+y)/2) - (f(x) + f(y))/2$ ne sont pas colinéaires. Pour montrer que f est linéaire, pourquoi suffit-il de montrer que $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$?

Planche 27 (Éléments de discussion)**.** Donner un exemple de fonction y avec $a(x) = x$ et $r(x) = 1$. Peut-on montrer la convergence en mettant des hypothèses additionnelles sur y ? Que se passe-t-il si y est croissante ? Que se passe-t-il si $y_{|\mathbb{R}^-} \equiv 0$? Et si on ne connaît que la fonction sur $\mathbb{R}_-$? Est-ce que vous pouvez donner une description des solutions ? Énoncez le théorème de Cauchy linéaire.

Planche 28 (Éléments de discussion)**.** Que se passe-t-il pour $\lambda = 0$? Quel est le nombre d'éléments de A_0 à précisément k chiffres ? Avez-vous une idée de ce que pourrait être le λ critique ? Pour traiter le cas $\lambda = 1/2$, restreignez-vous au cas où le nombre de chiffres est un multiple de 10. Si X_n est un nombre obtenu en choisissant uniformément au hasard n chiffres entre 0 et 9, que peut-on dire ?

Commencez par le cas où A et B sont diagonales.

Planche 29 (Éléments de discussion)**.** Peut-on se ramener à des formes plus simples de A et de B ?

Planche 30 (Éléments de discussion)**.** Regardez des polynômes de petit degré. Caractérisez l'ensemble des polynômes de degré 2 tels que $P(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Planche 31 (Éléments de discussion)**.** Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles $|\cos(n\theta)|$ converge ?

Regardez ce qui se passe matriciellement.

Planche 32 (Éléments de discussion)**.** En admettant qu'on puisse intervertir les limites, et que les convergences aient lieu dans les sens que vous voulez, que peut-on dire de g ? Quand peut-on intervertir limite et dérivation ? Si $f^n(z) = g(z) + \varepsilon_n(z)$, comment ne faire intervenir ε_n que pour des grandes valeurs de n ?

Est-ce que le rang est continu ? Que dire de B ?

Planche 33 (Éléments de discussion)**.** Calculez $g(n)$ pour des petites valeurs de n. Comment trouver l'ordre d'une permutation ? Essayez d'écrire n comme la somme de deux entiers et de plusieurs 1 pour avoir un PPCM pas trop petit.

Donnez un exemple de deux fonctions périodiques dont la somme n'est pas périodique.

Planche 34 (Éléments de discussion)**.** Calculez $g(n)$ pour des petites valeurs de n. Si G est un groupe fini commutatif, que dire de l'ordre de ab ? Peut-on avoir $g(n) = 3^2 \times 5$? Est-ce que $g(n) = p^\alpha$ est possible ? Si $g(n)$ est impair, montrez que si p divise $g(n)$, alors p^2 ne divise par $g(n)$. Peut-on voir f comme l'inverse d'une fonction ?

Planche 35 (Éléments de discussion)**.** Que dire de la vitesse de convergence vers 0 ? Par quoi majorer un coefficient binomial ?

Que se passe-t-il pour $c = 0$? Pour $c > 0$, est-ce que f peut être positive ? Que se passe-t-il au voisinage de $-\infty$?

Planche 36 (Éléments de discussion)**.** Calculez les lois de Y_i pour des petites valeurs de i. Pour calculer la loi de Y_6, de quoi avez-vous besoin ? En considérant $U_n = (Y_n, Y_{n+1})$, si vous partez de $(0, 1)$, regardez ce que vous pouvez faire. Si $A(x, y) = (y, x + y)$ et $B(x, y) = (y, |x - y|)$, est-ce que A, B vérifie une relation ? Quelle est la forme générale d'un mot en A et B ? Est-ce que ce mot appliqué au point $(0, 1)$ peut donner $(0, 1)$?

Si $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ avec $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(Z_1 = 2) = \mathbb{P}(Z_1 = -1) = 1/2$, montrez que $\mathbb{P}(S_n \leqslant 0) \to 0$.

Prenez $Y = I_n$. Donnez des exemples de fonctions qui conviennent.