RAPPORT SUR L'ÉPREUVE ORALE SPÉCIFIQUE DU CONCOURS 1ÈRE ANNÉE DES ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES DE PARIS SACLAY ET DE RENNES

B. Buet, P.-A. Guihéneuf, L. Ménard

Déroulement de l'épreuve

Cette année, 252 candidats et candidates ont passé l'oral de mathématiques spécifique pour les Écoles Normales Supérieures de Rennes et Paris-Saclay.

Il s'agit d'un oral sans préparation, d'une durée de 45 min, constitué d'un exercice qui commence en général par une question simple ou proche du cours — voire une démonstration au programme officiel — et comporte la plupart du temps plusieurs questions intermédiaires ou indications prévues pour êtres fournies au cours de la réflexion du candidat. Les exercices sont en grande partie inédits et inspirés de problèmes de recherche. À quelques rares exceptions près, ceux-ci n'ont été posés que deux fois durant toute la durée des oraux, sur deux interrogations successives, et à trois candidats en parallèle. L'inconvénient est qu'avec ce mode de fonctionnement, seulement 6 candidats passent sur un même exercice : cela fait un échantillon statistique assez restreint. Celui-ci nous apparaît néanmoins nécessaire : il est impensable d'espérer évaluer une personne ayant eu vent de l'exercice qui lui est posé.

Y sont évalués à la fois la méthode, la rigueur, la connaissance du cours et les compétences techniques, mais aussi l'autonomie, le dynamisme et les capacités de communication. Il va sans dire qu'on ne peut que déconseiller aux futurs candidats et candidates de négliger un de ces points lors de leur préparation. En revanche, le jury n'évalue que très peu la capacité à trouver une solution astucieuse et épiphanique à un exercice : un candidat ou une candidate avançant à son rythme et avec rigueur vers la résolution du problème, en proposant de résoudre des cas particuliers bien choisis ou des résultats intermédiaires, et capable de rebondir sur les indications de l'examinateur, se verra attribuer une excellente note. Nous y reviendrons plus en détail.

À l'abord d'une nouvelle question, le jury laisse au candidat le temps de creuser une piste et de réfléchir, puis rapidement une discussion s'engage avec le jury. Selon les situations, cette discussion peut prendre plusieurs formes : l'examinateur peut demander des éclaircissements ou des corrections mineures sur la preuve proposée, une synthèse de l'idée de preuve ou au contraire, réclamer une rédaction plus précise et rigoureuse des arguments précédemment fournis par le candidat. Il est également fréquent que, après lui avoir laissé quelques moments de réflexion sur une question difficile, le jury propose une piste à la personne interrogée, de manière plus ou moins directe.

Évaluation générale des candidats

Le jury s'accorde à dire que l'ensemble des admissibles est de bon niveau, avec une connaissance approfondie du cours, de nombreux réflexes mathématiques et des qualités en calcul. On observe de temps en temps des personnes plus sensibles au stress ou qui semblent perdre courage au fur et à mesure de l'oral. Nous rappelons donc à l'ensemble des admissibles que les questions du jury sont là pour aider à avancer dans l'exercice, que chaque année des candidats font de très bons oraux après un départ laborieux, et qu'il ne faut pas chercher à interpréter la discussion avec le jury, les exercices étant très différents les uns des autres. Bien sûr, le but du jury n'est en aucun cas de piéger les candidats, par ailleurs déjà assez sujets au stress : si l'un d'eux se voit demander s'il est sûr de ce qu'il vient d'affirmer, c'est probablement parce que l'interrogateur ou l'interrogatrice pense que c'est faux (ou alors qu'il n'est pas bien certain, au vu du ton du candidat, si ce qui vient d'être dit est une affirmation ou bien une question).

Comme l'année précédente, nous avons noté de sérieuses difficultés avec la géométrie, en partie dues au manque de pratique des dessins (qui, lorsqu'ils sont effectués, sont bien souvent trop petits ou mal choisis). La question de cours "*démontrer le caractère 1-lipschitzien de l'application distance à un ensemble*", posée de manière récurrente tout au long des quatre semaines d'oraux, a, bien qu'elle soit écrite en toutes lettres dans le programme officiel, posé problème à plus de la moitié des candidats auxquels elle était posée. Vue l'étendue de ce programme, nous n'attendons pas une résolution immédiate de chacune des démonstrations, mais plutôt un recul permettant de les retrouver sans trop de peine. Pour cette question de cours en particulier, un dessin bien choisi permet de s'en sortir sans embûche. Certains candidats et candidates ont eu des difficultés à nommer le théorème de Pythagore : celui-ci n'est pas qu'une comptine apprise par cœur au collège et ne s'applique pas uniquement à strictement parler aux triangles du plan, mais peut aussi concerner des objets comme les polynômes, dès lors que ceux-ci sont munis d'un produit scalaire.

Étonnament, nous avons aussi constaté des difficultés avec la théorie de la dimension. La question "*Soit E le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne est nulle. Montrer que* $\dim(E) \geq n^2 - 2n + 1$ a, de manière inattendue, posé problème à beaucoup de candidats. Rappelons que l'algorithme du pivot de Gauss n'a pas seulement un intérêt calculatoire mais est aussi à la base de bon nombre de résultats théoriques.

Conseils pour les futurs admissibles

Ces conseils recoupent en grande partie ceux des années précédentes.

- On voit trop de candidats refuser de rédiger leurs preuves et se contenter d'en répéter l'idée générale, malgré l'insistance du jury. Si l'exposé de la stratégie de preuve est apprécié par le jury, sa mise en œuvre se révèle souvent plus délicate qu'il n'y parait. Il faut donc rédiger proprement une preuve, vérifier les hypothèses des théorèmes, éventuellement énoncer des résultats intermédiaires, etc. Renâcler à passer à l'écrit ou pire, suggérer que le jury (qui a écrit l'exercice...) n'a pas compris est du plus mauvais effet.

- De même, malgré l'insistance parfois pressante du jury, certains candidats rechignent à écrire proprement les hypothèses des questions au tableau, et plus généralement tout ce qui ne relève pas de la formule mais fait quand même partie intégrante du langage mathématique : connecteurs logiques, quantificateurs, etc. Inutile de dire que c'est une très mauvaise idée. En premier lieu, cela permet, à tout moment, de retrouver l'énoncé précis du résultat auquel on souhaite aboutir, et d'isoler les hypothèses utiles à chaque étape du raisonnement. Ensuite, cela permet réutiliser dans la suite de la planche les questions déjà traitées (ce qui est en somme assez courant). Enfin, ne pas faire ce que demande le jury démontre soit une capacité de communication limitée, soit une témérité quelque peu inattendue lors d'une épreuve orale. Notons que la gestion du tableau est une compétence évaluée, au moins indirectement, par le jury : certains et certaines se sont retrouvés bloqués au cours de la planche, simplement parce qu'ils avaient effacé une partie de leurs résultats, et cela malgré les protestations de l'interrogateur. Se forcer à présenter correctement son tableau, c'est aussi s'assurer d'avoir à tout moment la structure de l'exercice en tête.
- Certains candidats ne tiennent pas compte des pistes fournies par l'examinateur au cours de l'épreuve. Le but du jury n'est pas d'embrouiller le candidat ou de le lancer sur de fausses pistes, mais bien de le guider dans la résolution d'exercices parfois difficiles. Ne pas être attentif à ces indications revient à se tirer une balle dans le pied.
- À tout moment de l'oral le jury peut être amené à poser des questions très simples autour du cours ou de cas particuliers. C'est tout à fait normal et cela ne présage en rien de la réussite de la personne interrogée, mais vise à évaluer de manière la plus complète possible son oral. Cela peut aussi constituer une indication (à demi) cachée pour la résolution de l'exercice, que ce soit par l'utilisation directe de la propriété demandée ou bien de son idée de preuve.
- Le jury apprécie grandement les candidats et candidates qui, lorsqu'ils sèchent sur une question, proposent d'eux même de considérer des cas simples (le plus souvent il s'agit de traiter le cas $n = 2$ avant de s'attaquer à des n quelconques, que n soit une dimension, une régularité, un cardinal ou un paramètre). Il est assez rare que les personnes interrogées osent simplifier un énoncé difficile, or quand elles le font l'initiative est souvent couronnée de succès et débouche sur une preuve générale. Lorsqu'une telle simplification devient triviale et ne permet pas d'avancer sur le cas général, le jury apprécie aussi que les candidats s'en rendent compte d'eux-mêmes.
- Au contraire, certains candidats essaient de résoudre la question posée en cherchant exhaustivement une astuce qui permettrait une solution immédiate et lucrative en termes de note finale. Comme nous l'avons déjà dit, nous ne cherchons pas à évaluer ce type de compétences. Les exercices proposés ne sont pour ainsi dire jamais « à astuce », mais demandent une certaine imprégnation de l'énoncé et des notions mises en jeu (à l'instar de presque tous les problèmes de recherche). Ils nous permettent de tester des qualités qui feront des futurs normaliens et normaliennes de bons enseignants et de bonnes chercheuses : compréhension profonde des objets manipulés (qui constitue un prérequis aux compétances pédagogiques) et capacités d'adaptation face à un problème nouveau.
- Les exercices font exceptionnellement intervenir des objets ne tombant pas di-

rectement dans le programme (par exemple, des EDO non linéaires). Dans ce cas, le jury est bien conscient de ce fait, et aucune connaissance hors programme n'est attendue des candidats. Le but de telles questions est de voir comment l'aspirant normalien réagit face à la nouveauté ou à un cadre original. Les énoncés sont conçus pour pouvoir être résolus grâce à une réflexion ne faisant intervenir que des notions connues des candidats (et aucune dans l'adhérence du programme).

- Le niveau des exercices proposés étant relativement hétérogène — ceux-ci étant pour la plupart, rappelons-le, originaux —, il est compensé par la quantité d'indications fournies par le jury. Les candidats ne doivent donc pas s'inquiéter — et surtout pas se pétrifier comme on l'a parfois vu — si l'examinateur à tendance à lui en fournir régulièrement : cela peut simplement signifier que l'exercice proposé est très difficile et nécessite un soutien régulier du jury pour être résolu dans les 45 minutes imparties.
- Trop peu de candidats s'appuient sur des dessins lors de l'épreuve. Leur usage, largement récompensé par le jury, est pourtant d'une aide souvent cruciale.
- C'est en général une très mauvaise idée de changer les notations de l'énoncé fourni par le jury : elles ont été prévues pour aider le candidat dans son raisonnement et éviter les conflits de notation pour la suite de l'épreuve.

Pour illustrer quelques-uns de ces points, voici des exemples d'exercices proposés lors des épreuves orales.

Exercice :

Soit $n \geq 1$ et $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, et pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$d_C(x) = \inf_{c \in C} \|x - c\|.$$

1. Montrer que la borne inf existe et est atteinte.
2. Montrer que d_C est 1-lipschitzienne.
3. Montrer que si C est convexe, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il y a un unique point c_x réalisant ce minimum.
4. Montrer que d_C est différentiable en x si et seulement si il y a un unique point c_x réalisant ce minimum.

Commentaires : Chacune des deux implications de la quatrième question est longue et délicate : nous en avons fait deux exercices séparés. Il était attendu des candidats qu'ils sachent traiter seuls et en temps raisonnable les deux premières questions, qui sont très proches du cours. La question 3 est relativement classique et se résoud traditionnellement avec l'identité du parallélogramme; on attendait des candidats ne connaissant pas cette méthode (et c'est normal!) qu'ils raisonnent par l'absurde à partir d'un dessin, et en déduisent une contradiction à l'aide de raisonnements simples sur le produit scalaire. La dernière question est bien plus difficile et les candidats ont été largement guidés dans sa résolution.

Exercice :

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $f(n)$ le plus grand entier $k \geq 1$ tel qu'il existe des nombres distincts $x_1, \ldots, x_k$ dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que les sommes qu'on peut former en utilisant chacun de ces entiers au plus une fois soient toutes différentes.

1. Calculer $f(4)$.
2. Montrer que pour tout n, $f(n) \geq 1 + \lfloor \ln_2(n) \rfloor$.
3. On fixe $n \geq 2$ et des entiers $x_1, \dots x_k$ de $\{1, \dots, n\}$ tels que toutes les sommes qu'on peut former avec soient distinctes. On se donne aussi $B_1, \dots, B_k$ des variables de Bernoulli de paramètre $1/2$ indépendantes. Enfin on note $X = \sum_{i=1}^{k} x_i B_i$ et on fixe $\lambda > 1$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n\sqrt{k}/2\right) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$
   (b) Montrer que
   $$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| < \lambda n\sqrt{k}/2\right) \leq 2^{-k}(\lambda n\sqrt{k} + 1).$$
4. Majorer $f(n)$ le plus précisément possible (on obtiendra $f(n) \leq \ln_2(n) + \frac{1}{2}\ln_2(\ln_2(n)) + C$).

Commentaires : Erdös a conjecturé qu'il existe $C > 0$ tel que $f(n) \leq \ln_2(n) + C$ pour tout n, et la queston est toujours ouverte. La preuve exposée ici est due à Erdös et Moser. Elle suit une stratégie désormais classique en combinatoire : la méthode probabiliste.

Dans la question 2., on s'attendait à ce que les candidats pensent à extraire de l'ensemble les puissances de 2, comme la présence de $\lfloor \ln_2(n) \rfloor$ le suggère. La fin de sa résolution passe par l'unicité de l'écriture d'un entier en base 2 ; étrangement la preuve de ce fait a bloqué bon numbre de candidats. La question 3.(a), simple application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, n'a pas posé de problème. En revanche, la question 3.(b) demande un peu plus de recul sur les hypothèses utilisées. La dernière question est bien plus technique.

Exercice :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que
   $$f \text{ est convexe} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq f(x)\} \text{ est convexe.}$$
2. Soit $S = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un segment et $f,\ g : S \to \mathbb{R}$ convexes de classe C^1. On définit $M = \max(f, g)$ et on suppose que $M \geq 0$ sur S. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $(1 - \lambda)f + \lambda g \geq 0$.
3. Que dire si on remplace le segment S par $\mathbb{R}_+$?
4. Que dire si on ne suppose plus l'hypothèse f de classe C^1 ?

Commentaires : L'équivalence, pour les fonctions de classe C^1, entre convexité et fait d'être au-dessus de ses tangentes, n'est pas venue à l'esprit de tous les candidats, même lorsque l'examinateur leur demandait explicitement toutes les caractérisations qu'ils connaissaient de la convexité sous l'hypothèse C^1. Certains ont été découragés par la petite disjonction de cas à faire à la fin de la résolution de la question 2. Rappelons-le : il faut parfois mettre la main à la pâte pour conclure une preuve. Il est contre-productif de rechigner à écrire les détails techniques, voire de sous-entendre que l'exercice proposé est désagréable. DAns cet exercice, la clef de la réussite était bien souvent un dessin clair bien choisi du graphe des fonctions.

Exercice :

On note $SL_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers de déterminant 1.

Cours Montrer que la somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe (sans le lemme des noyaux).

1. On définit l'ensemble Λ des valeurs propres d'automorphismes $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ sans valeur propre de module 1. Montrer que l'ensemble $\Lambda \cup \{-1,1\}$ est une partie discrète de $\mathbb{R}$, puis calculer
$$\lambda_0 = \min(\Lambda \cap]1,+\infty[).$$

Pour tout groupe G, on appelle *centralisateur* d'un élément $g \in G$ est le sous-groupe $C_G(g)$ des éléments $h \in G$ tels que $gh = hg$.

2. Montrer que si $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ est sans valeur propre de module 1, alors $C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
3. On considère l'automorphisme linéaire
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer deux éléments qui engendrent le centralisateur de A_1 dans $SL(2,\mathbb{Z})$

Commentaires : La première question a posé pas mal de problèmes à beaucoup de candidats, qui cherchaient à tout prix une astuce permettant de la résoudre, alors que la simple écriture du polynôme caractéristique (de degré 2 !) et l'étude de ses racines suffisent pour s'en tirer sans encombre. La question 2., bien plus difficile et délicate, a — étonnamment ! — été mieux réussie. L'indication suivante leur a été presque toujours donnée : étudier l'ensemble des valeurs propres des éléments de $C_{SL_2(\mathbb{Z})}(A)$.