Banque MP Inter-ENS - Session 2019
Rapport sur l'oral de Mathématiques ENS Lyon

Razvan Barbulescu, Pierre Dehornoy, Julien Marché

1 Déroulement de l'épreuve

L'épreuve orale spécifique de mathématiques de Lyon compte pour $16,2\%$ de la note finale dans les filières MP et MI.

Elle dure 45 minutes et comprend généralement deux phases. L'examinateur commence par dicter l'énoncé d'un exercice au candidat puis l'invite à prendre un temps pour réfléchir. Le candidat se concentre et l'examinateur se met en retrait, de manière à ne donner aucune indication pendant une dizaine de minutes. Le candidat peut toutefois demander des éclaircissements si l'énoncé n'est pas suffisamment clair, et peut, s'il le souhaite, entamer immédiatement la résolution de l'exercice.

Si la candidate ne nécessite aucune aide de l'examinateur[1], ce dernier lui pose les questions suivantes, et cela jusqu'à la fin de l'oral. La plupart du temps, l'examinateur donne des indications courtes pour la résolution de l'exercice et observe la manière dont la candidate se saisit de ces indications. Une conversation directe s'établit : si la solution proposée n'est pas suffisamment détaillée, l'examinateur demande des explications. Si les indications ne suffisent pas, l'examinateur pose des questions de plus en plus précises qui peuvent aller jusqu'à des questions de cours permettant d'identifier le blocage. L'oral se termine avec la résolution de l'exercice, ou d'une question intermédiaire. Parfois, si le temps manque, l'examinateur peut demander à la candidate des idées ou un schéma menant à la solution, sans que celle-ci n'ait le temps d'être détaillée. Si l'exercice est résolu avant la fin de l'oral, un deuxième est proposé.

À la fin de l'oral, la candidate efface le tableau et quitte la pièce pour laisser immédiatement entrer un nouveau candidat.

[1] Si le jury déplore le faible nombre de candidates, il déplore aussi d'être souvent exclusivement masculin.

2 Compétences attendues

Les exercices proposés peuvent tous être résolus à l'aide des notions aux programmes de MPSI et de MP*. Sont attendues une maîtrise complète des notions qui y figurent ainsi qu'une pratique certaine de la résolution d'exercices. Il arrive que certaines notions hors-programme soient introduites, mais le jury ne s'attend pas à ce qu'elles soient connues des candidats, et il prend des précautions pour s'assurer que le candidat les comprend.

Les candidats doivent être capables de proposer une résolution complète dans les meilleurs standards de rigueur. Cependant l'examinateur permet une résolution plus informelle s'il ressent que le candidat serait capable de l'expliquer dans ses moindres détails.

Certains arguments “classiques” mais pas au programme peuvent intervenir dans la résolution d'un exercice. Un candidat qui ne connaît pas l'argument n'est pas pénalisé : l'examinateur évalue sa connaissance de l'argument et considère sa compréhension comme une étape supplémentaire de l'oral. La capacité à appliquer ou transposer l'argument dans la situation de l'exercice sera d'autant plus valorisée.

Les exercices tendent à couvrir tout le programme et de préférence mélangent plusieurs notions entre elles. La capacité à appliquer une technique issue d'un domaine pour l'appliquer à un autre est particulièrement testée. Par exemple, sera testée la capacité à appliquer sans indication un raisonnement d'algèbre linéaire pour résoudre un problème sur des polynômes ou sur les suites de fonctions.

Plusieurs qualités sont particulièrement valorisées : la rigueur, la réactivité, l'imagination et la culture mathématique. Sur ce dernier point, soulignons que le jury apprécie que le candidat montre une certaine culture (“Cela me fait penser à tel ou tel résultat”), mais ce n'est pas non plus un critère déterminant de la note : le jury a conscience que la culture est aussi liée à l'environnement scolaire, et que toutes les classes préparatoires ne se valent pas de ce point de vue.

L'oral étant très court, le candidat doit de lui-même envisager rapidement plusieurs pistes pour la résolution de l'exercice et en changer si celle qu'il a suivie est trop longue ou infructueuse. S'il ne le fait pas lui-même, il doit pouvoir rapidement utiliser les indications fournies par l'examinateur. Il est possible pour le candidat, voire souhaitable, de proposer (avec un minimum de précaution oratoire) un raisonnement non rigoureux (par exemple via un dessin ou un schéma) pour faciliter la résolution de l'exercice.

3 Commentaires, conseils

Le jury est globalement très satisfait du niveau des candidats au concours. Le cours est généralement bien connu et les candidats ont une grande pratique d'exercices type. De plus les candidats sont sans exception parfaitement conscients des compétences attendues.

Le jury est déçu du faible nombres de candidates qui s'inscrivent au concours. Les métiers de la recherche sont ouverts à toutes et tous, et le jury se désole de voir une majorité d'hommes, venant de Paris ou de proche banlieue.

Quelques commentaires et conseils nous semblent de mise à l'issue de cette session.

Nous recommandons aux candidats de lire les programmes pour vérifier qu'ils connaissent les notions qui y figurent. Si l'examinateur s'aperçoit qu'une notion ou un théorème n'est pas connu, il prendra le temps de revenir dessus, mais la note s'en ressentira.

Le jury est attentif à ce que les exercices proposés soient nouveaux et assez difficiles. Le jury privilégie particulièrement les exercices mobilisant plusieurs notions du programme. Il est difficile d'avoir des exercices tous du même niveau, et le jury constate que certains exercices ou thèmes réussissent en moyenne mieux aux candidats. Chaque exercice étant posé 6 fois (c'est-à-dire à 3 candidats en même temps, pour deux planches consécutives), le jury s'appuie sur les différentes performances pour évaluer la difficulté de l'exercice et adopter une notation qui en tienne compte.

Malgré le soin apporté à la nouveauté, les exercices mobilisent souvent des idées ou des techniques que les candidats ont pu rencontrer par ailleurs. Il faut donc au candidat un maximum de références mathématiques (théorèmes, banque d'exercices, contrexemples) pour optimiser ses chances de succès. À ce propos le jury constate que certains candidats sont mieux préparés que d'autres aux exercices particuliers des ENS. Il recommande donc à tous les candidats intéressés par les ENS de regarder des annales et les numéros de la Revue de mathématiques spéciales qui rescencent les exercices récemment posés. Insistons qu'il est rare qu'un candidat résolve seul l'exercice, et ce n'est pas ce que le jury attend. Le niveau des exercices tirés des annales ne doit donc pas être source de découragement : au cours de l'oral des indications pourront être données par l'examinateur, et une qualité essentielle consiste à les saisir et les adapter à la situation. Pour cette raison, travailler les théorèmes du cours et les annales en prenant le temps de comprendre les arguments nous semble plus rentable que d'apprendre par cœur un grand nombre d'exercices-type. En effet le jury est déçu quand un candidat semble reproduire des automatismes et que les questions révèlent que ceux-ci ne sont pas compris.

Les candidats ont parfois des difficultés à mélanger des notions issues de chapitres différents du cours, ou à s'affranchir de certaines règles de prudence. Par exemple une question consistait à montrer qu'un polynôme réciproque $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $2n$ peut s'écrire $P(X) = X^n Q(X + 1/X)$ pour un unique polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Les candidats ont majoritairement montré de grandes difficultés à résoudre le système linéaire triangulaire caché dans cette question. De même plusieurs exercices consistaient à effectuer un dénombrement à l'aide de séries entières. Plusieurs candidats ne semblaient pas à l'aise avec cette technique : ils étaient particulièrement réticents à manipuler une série entière a priori, c'est-à-dire sans se soucier de son rayon de convergence. Cela nous a paru lié à un cloisonnement (bien compréhensible) entre les différentes parties du programme.

Les candidats ont parfois du mal à choisir le bon niveau de détail dans les solutions. La démarche consistant à présenter un schéma de preuve à l'oral puis à en écrire les détails est toujours appréciée. Parfois les candidats rechignent à cette deuxième étape. À l'opposé, dans d'autres (rares) situations, les candidats s'enferrent dans des précisions et des précautions qui ralentissent le déroulement de l'oral. Dans les deux cas, le candidat n'a pas sû apprécier le bon niveau de détail requis pour proposer une solution satisfaisante.

Il n'est jamais bon de rester bloqué en attendant une indication, une telle passivité est lourdement sanctionnée. Le jury apprécie les candidats expliquant leurs idées, quitte à dire pourquoi elles paraissent vouées à l'échec, ou présentant les théorèmes proches, quitte à expliquer pourquoi ils ne peuvent s'appliquer. Dans une situation de blocage, tester des valeurs particulières ou des cas particuliers témoigne d'une attitude combative appréciée. Ajoutons qu'il arrive qu'un candidat soit perturbé par un exercice non standard et ne produise pas grand chose pendant le premier quart-d'heure. S'il parvient à s'approprier l'exercice et à profiter des indications, il arrive que ce candidat finisse très bien l'oral et s'en sorte avec une note honorable. La ténacité paie !

À l'opposé un candidat qui fonce vers une solution lourde ou des cas particuliers compliqués sans prendre le temps de réfléchir à l'existence de solutions simples peut être sanctionné.

Enfin, les membres du jury ont un certain goût pour la géométrie qui, si elle a plus ou moins disparu du programme des classes préparatoires, n'a pas disparu des mathématiques ! Un certain nombres d'exercices s'appuyaient sur une certaine intuition géométrique (convexité, réseaux du plan, itérations de fonctions d'une variable, symétries, courbes planes) qui était difficilement mobilisée par les candidats. En particulier, l'examinateur doit souvent insister pour que le candidat fasse un dessin, alors même que ce dernier le met souvent sur la bonne piste.

4 Exemples d'exercices

Voici 13 exercices, sur les 40 posés lors de la session 2019, qui nous paraissent représentatifs et qui méritent quelques commentaires. Aucun de ces exercices ne devrait être reposé lors des prochaines sessions, mais ils montrent le genre d'exercice qui peut se présenter. Ils sont de difficultés variées, mais le jury essaie de compenser cette hétérogénéité par le nombre et la précision des indications.

Exercice 1.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 a support compact et $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de racines primitives n-ièmes de l'unité. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \zeta_n^k f(\frac{k}{n}).$$

Commentaire.— Le calcul de $(\zeta_n - 1)S_n(f)$ a été rapidement suggéré à tous les candidats. En revanche le jury a classé les candidats selon la capacité à reconnaître ensuite une somme de Riemann, à extraire une sous-suite convergente de ζ_n, à séparer selon que ζ_n tend vers 1 ou autre chose, et à identifier les possibles valeurs d'adhérence.

Exercice 2.— Construire un polynôme P de $\mathbb{Z}[x]$ unitaire, irréductible, de degré 10, tel que P a 2 racines réelles positives et 8 racines sur le cercle unité, et tel que $P(0) = 1$.

Commentaire.— Posé tel quel, l'exercice est difficile à aborder et les candidats qui se sont le plus approchés d'une solution ont bénéficié de nombreuses indications. Néanmoins certaines remarques sur les relations entre coefficients et racines peuvent être faites. Le jury a donc guidé les candidats, et évalué leur capacité à comprendre les indications et à les suivre. Une étape importante consistait à ramener la recherche de P à celle d'un polynome Q de degré 5 tel que $P(z) = z^5 Q(z + 1/z)$, une seconde étape consistait à chercher où devaient être situées les racines de Q, et une troisième étape consistait à construire un Q qui marche en combinant des Q_i issus de polynômes cyclotomiques.

Exercice 3.— Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T_n = \mathrm{card}(Z_n)$ où on a posé :

$$Z_n = \{\sigma \in S_{2n+1}, \sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n) > \sigma(2n+1)\}.$$

Calculer la série génératrice $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{T_n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Question additionnelle : comment se comporte la probabilité qu'une permutation donnée soit zigzagante, quand n vers l'infini ?

Commentaire.— Les candidats ont pour la plupart cherché une relation de récurrence pour T_n, ce qui était attendu. Leur recherche a souvent été aiguillée par le jury, qui s'est étonné de la réticence de certains candidats à dessiner un exemple de permutation en zigzag. Pourtant, c'est toujours sur un dessin que l'idée de couper au sommet a été trouvée. Pour la seconde question, il s'agissait de trouver une équation différentielle satisfaite par F, et de reconnaître l'équation de la tangente. Si certains candidats l'ont immédiatement fait, d'autres ont semblé désarçonnés que des équations différentielles arrivent dans un problème de dénombrement.

Exercice 4.—

1. Soit A, B, C trois polynômes à coefficients complexes premiers entre eux tels que $A + B = C$. Alors $\max((\deg A, \deg B, \deg C) \leq n - 1$, où n est le nombre de racines distinctes de ABC.
2. En déduire tous les $n \in \mathbb{N}$ et $a, b, c \in \mathbb{C}[X]$ tels que $a^n + b^n = c^n$.

Commentaire.— Une astuce importante de l'exercice consiste à étudier le wronskien $W(A, B) = AB' - A'B$. Le jury ne s'attendait pas à ce que les candidats l'introduisent sans indication. En revanche étaient évaluées la capacité à découvrir l'égalité $W(A, B) = W(A, C)$, à vérifier que la multiplicité des racines de A se lit sur $\mathrm{pgcd}(A, A')$ et donc à introduire $A/\mathrm{pgcd}(A, A')$, et enfin à relier les degrés de tous ces acteurs pour démontrer le premier résultat.

Exercice 5.— Montrer que tout automorphisme du groupe S_4 est donné par la conjugaison par un élément de S_4.

Commentaire.— Les notions d'automorphismes et de conjugaison dans un groupe n'étant pas centrales dans le programme, le jury s'est assuré auprès de chaque candidat que la définition était connue. Cet exercice explorait un aspect du programme un peu délaissé, et le jury a noté que plusieurs candidats n'étaient pas à l'aise avec les décompositions en cycles. Rien d'alarmant à cela, il fallait surtout mettre les mains dans le cambouis et revenir aux définitions pour démontrer ce cas particulier d'un classique de l'agrégation.

Exercice 6.— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pour toute subdivision σ de $[a, b]$, $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_n = b$, on pose $V(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{n+1}) - f(x_n)|$. Ensuite on pose $V(f) = \sup_\sigma V(f, \sigma)$. Une fonction f est dite à variation bornée si on a $V(f) < \infty$.

1. Précisez lesquelles des conditions suivantes impliquent que f est à variation bornée : f est continue, f est $\mathcal{C}^1$, f est lipschitzienne, f est monotone.
2. Montrer qu'une fonction est à variation bornée si et seulement si elle peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.

Commentaire.— La plupart des candidats ont assez rapidement identifié que les conditions 2, 3, et 4 impliquent variation bornée. Pour la première condition, les candidats ont assez vite pensé à la fonction $x \mapsto x \sin(1/x)$. Mais la preuve du fait qu'elle n'est pas à variation bornée a été assez discriminante. Pour la seconde question, la construction des deux fonctions croissantes n'était pas facile, mais elle a permis de tester l'esprit d'initiative et d'adaptation des candidats.

Exercice 7.— Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application $h_M : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dans lui-même. On dit qu'un point $x \in \mathbb{R}$ est *errant* s'il existe un intervalle ouvert I contenant x tel que pour tout entier $n > 0$ on a $h_M^n(I) \cap I = \emptyset$. Décrire l'ensemble des points errants de h_M.

Commentaire.— La notion d'homographie n'étant plus au programme depuis longtemps, les candidats n'étaient pas habitués à voir des matrices de taille 2 agir sur $\mathbb{R}$. Une première étape consistait donc à vérifier $h_M \circ h_{M'} = h_{MM'}$, ce que plusieurs candidats ont pensé à vérifier tous seuls. Faire des exemples, par exemple avec $c = 0$ était aussi une bonne idée. Ensuite, remarquer l'effet d'une conjugaison sur M pour se ramener à des matrices diagonales ou trigonales permettait de se ramener aux exemples déjà étudiés.

Exercice 8.— On considère l'équation différentielle suivante $A(0) = A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ et

$$A'(t) = A(t)A(t)^T - A(t)^T A(t).$$

Déterminer $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t A(s)ds$ en fonction de A_0.

Commentaire.— La plupart des candidats ont reconnu le caractère symétrique du membre de droite, mais ont pourtant rechigné à décomposer A entre partie symétrique et antisymétrique. Le théorème spectral est parfaitement connu de la majorité des candidats. En revanche la résolution d'une équation différentielle linéaire (certes sur l'espace des matrices symétriques) n'allait pas de soi : il a souvent fallu suggérer d'utiliser l'exponentielle.

Exercice 9.— Quelles sont les matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ dont l'ordre est fini ?

Commentaire.— La détermination des valeurs possibles de l'ordre à l'aide de la trace a été discriminante sur cet exercice. Aucun candidat n'a eu le temps de justifier que deux matrices de même ordre (fini) sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 10.—

1. Montrer que pour tout polynôme unitaire $P(x) = x^2 - ax + b \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $\mathrm{disc}(P) \neq 0$ toutes les matrices A de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ telles que $\chi_A = P$ sont dans la même classe de conjuguaison.
2. Soit p un nombre premier impair. Pour chaque polynôme $P \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$ de degré 2 tel que $\mathrm{disc}(P) \neq 0$ et toute matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telle que $\chi_A = P$, quelle est la probabilité qu'une matrice $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ commute avec A ?

Commentaire.— Pour la première question, la plupart des candidats connaissaient l'argument classique selon lequel deux matrices réelles conjuguées sur $\mathbb{C}$ le sont sur $\mathbb{R}$. La capacité à le transposer vers $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ et $\mathbb{Q}$ était ici déterminante. Pour les quelques candidats ne connaissant pas cet argument, le jury à donné des indications pour le trouver, et évalué la capacité à se l'approprier pour l'appliquer ici. La seconde question demandait d'admettre que les raisonnements de la première question s'adaptait aux corps finis. Le jury constate avec plaisir que cela n'effrayait pas la plupart des candidats. Le jury a récomposé les candidats qui prenaient la peine de bien identifier et séparer les différents cas.

Exercice 11.— On considère l'application $f = [0,1] \to [0,1], x \mapsto 4x(1-x)$. Soit $u_0 \in [0,1]$, on considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est stationnaire.
2. On choisit u_0 uniformément parmi les $\sin(\frac{k\pi}{N})^2$ avec $k \in \{0, \dots, N\}$ et on note p_N la probabilité que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit stationnaire. La suite $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$ a-t-elle une limite ?

Commentaire.— La première question concernaient l'étude des points fixes. Certains candidats connaissaient la notion de point répulsif, et ont traité rapidement le cas de 0. Même pour ceux-là, l'étude de $3/4$ a souvent posé quelques difficultés. Les candidats ne connaissant pas cette notion ont néanmoins compris le comportement au voisinage de 0 sans recourir à ce vocabulaire, et n'en ont pas été pénalisés. La seconde question était d'une nature un peu différente, et demandait de voir que le type de N (puissance de 2 ou premier impair par exemple) changeait le comportement de p_N. Le jury a apprécié dans cette seconde question que la plupart des candidats donnent directement une formule exacte pour u_n.

Exercice 12.—

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ pour un entier N. Soit $y \in \mathbb{C}^N$ un vecteur colonne. Pour tout entier i on pose $y_i := A^i y$. Montrer que la suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire.
2. Supposons maintenant que $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un premier p. On admet que le résultat de la première question est vrai dans ce contexte. Si y est choisi de manière aléatoire uniforme dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^N$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\text{ordre de } (A^i)_{i\in\mathbb{N}} \neq \text{ordre de } (A^i y)_{i\in\mathbb{N}}\right) \leq N/p.$$

On rappelle que l'ordre d'une suite récurrente linéaire (a_i) est le plus petit entier n tel qu'il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}_p$ tels que $\forall k \geq n, a_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{k-i}$.

Commentaire.— La question 2 sortait du cadre du programme puisqu'on n'est pas censé considérer des corps autres que des sous-corps de $\mathbb{C}$. Néanmoins après que le jury les ait rassurés qu'on n'utiliserait rien de particulier à part la finitude de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cette question n'a pas eu l'air de perturber les candidats, et elle a été en général traitée de façon satisfaisante.

Exercice 13.— Pour E_1, E_2 deux sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$, on définit $E_1 + E_2 = \{p_1 + p_2 \,|\, p_1 \in E_1, p_2 \in E_2\}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $\lambda E = \{\lambda x \,|\, x \in E\}$.

1. Soit P un polygone de $\mathbb{R}^2$ (ie., l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points). Montrer que P admet un centre de symétrie si, et seulement si, il existe un nombre fini de segments $S_1, \ldots, S_k$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $P = S_1 + \cdots + S_k$.
2. Soit P et Q deux polygones symétriques. Montrer que Aire$(P + tQ)$ est un polynôme en t.

Commentaire.— La question a dérouté une majorité de candidats. Le jury attendait ici surtout de voir comment les candidats s'appropriaient cette notion élémentaire mais peu connue. La rédaction précise d'une solution étant un peu lourde, le jury a laissé les candidats développer leurs idées, quitte à accepter certaines remarques sans preuve. En particulier pour le sens direct de la question 1, formuler une conjecture précise sur les segments S_i dont la somme de Minkowski vaut P était valorisé.