Banque MPI Inter-ENS - Session 2019

Rapport sur l'oral de Mathématiques

Oral commun ULCR

Le jury de cette épreuve était constitué de Agnès DAVID, Pierre MONMARCHÉ, Tuong-Huy NGUYEN, et Arvind SINGH. 454 candidats ont passé l'épreuve. Les coefficients de l'épreuve en pourcentage du total d'admission étaient les suivants :

Ulm MP et MPI	Lyon MP et MI	Paris-Saclay et Rennes MP et MPI	Ulm info	Lyon Info M	Paris-Saclay Info
13,9%	10,8%	15,4%	13,3%	12,7%	13,2%

1 Déroulement des épreuves

1. Chaque candidat était interrogé au tableau par l'un des examinateurs, sans temps de préparation. La durée officielle d'une interrogation étant de 45 minutes, le tiers-temps ouvrait le droit à un quart d'heure supplémentaire.
2. La question posée et après dix premières minutes sans interagir aucunement, l'examinateur commençait — si nécessaire — à assister le candidat.
3. Cette phase de résolution supervisée occupait la plupart de la planche ; on retiendra déjà qu'une résolution supervisée n'est pas une résolution guidée.
4. En cas d'achèvement, un deuxième exercice (voire un troisième) a pu être proposé. C'était toujours bon signe.

Détaillons les points ci-dessus.

1.1 Formulation de l'exercice

Le jury pouvait avoir deux attitudes : pour un énoncé long, l'avoir préalablement inscrit au tableau ; ou le dicter au candidat. Dans ce second cas l'évaluation commençait dès alors, et pour plusieurs raisons.

— Manifester une certaine indépendance de notations n'est pas une mauvaise chose ; le risque étant néanmoins de renommer à la volée la moitié seulement de l'énoncé, la notation de l'examinateur étant supposée aider les candidats.

— Le candidat qui omet de transcrire certaines des hypothèses (malgré la répétition pressante) court toujours le risque de les oublier par la suite. Au demeurant ne pas daigner noter qu'une fonction est continue donne l'impression de tenir pour acquis qu'elles le sont toutes.

— La dextérité dans l'emploi de l'appareil de notations est inégalement partagée. Or la maturité technique est mesurable aussi d'après le recul face au langage mathématique.

1.2 Les dix premières minutes

Le jury s'astreignait à dix minutes de mutisme et même d'impassibilité, n'engageant ni ne laissant s'engager d'emblée le dialogue. Le candidat était prévenu. Ce premier temps a toujours fourni des indications précieuses non seulement sur l'autonomie du candidat mais aussi sur son pouvoir d'intuition. Et malgré l'apparente hostilité du procédé (déplaisant autant pour l'examinateur que pour le postulant), il n'a pas semblé déstabiliser de candidat.

Il est en effet intéressant de voir comment part le candidat face à un problème qu'on suppose entièrement nouveau pour lui. La résolution directe d'un exercice de type É.N.S. n'est pas nécessaire à l'obtention d'une note correcte ; seule la planche excellente se passe ainsi ; nous y reviendrons. Lors à défaut d'une épiphanie soudaine, on attend du candidat de la méthode, de l'autonomie, et un certain dynamisme.

Méthode. L'assimilation d'un problème se fait souvent par commentaire et simplification, de manière lucide et posée.

Un but essentiel de l'oral est de juger de la capacité du candidat à analyser un problème. Comprendre où se situe la difficulté, faire des parallèles avec d'autres problèmes déjà connus, discuter du problème dans des cas particuliers pertinents est très apprécié. À ce titre, prendre quelques minutes pour étudier l'énoncé sans se lancer tambour battant dans des calculs ou un raisonnement formaté peut être une bonne option. Un énoncé contenant un entier naturel ne s'établit pas toujours par récurrence ; l'introduction d'une base ne simplifie que rarement un problème d'algèbre linéaire ; on ne dérive pas tête baissée une fonction seulement supposée continue.

Faire des dessins, même dans des cas particuliers, même de façon simpliste, est souvent inspirant. Il est frappant de constater que nombre de candidats sont immédiatement débloqués quand l'examinateur leur suggère de faire un dessin. Ce devrait pourtant être une initiative naturelle.

Le jury voudrait insister sur la vanité d'une foi trop littérale en cette méthodologie de bon sens. Paraphraser l'énoncé, en se contentant de rappeler les définitions ; le simplifier à outrance pour n'aborder qu'un cas manifestement trivial ; esquisser des petits dessins sérigraphiés sans lien avec le problème, sont des « trucs » qui ne feront pas longtemps illusion. Il est aisé de paraître profond et de présenter les caractères extérieurs d'une méthodologie supérieure pendant deux minutes : or dix minutes sont assez pour que tel numéro tourne à vide.

Autonomie. Le jury attend des candidats un certain sens de l'initiative. Rester muet parce qu'on n'a pas la solution totale de l'exercice dénote un certain manque de maturité scientifique. De même proposer de nombreuses pistes différentes afin que le jury en choisisse une, montre un défaut d'autonomie.

Rappelons que le niveau des oraux d'É.N.S. étant élevé, les exercices nécessitent en général un raisonnement long et progressif. Le jury en a pleinement conscience et attend du candidat qu'il lui montre son *aptitude à raisonner*, même si ce raisonnement est incomplet.

Dynamisme. Les examinateurs ont été surpris de l'attitude passive de certains candidats, qui semblent attendre qu'on leur dise quoi faire. Ne montrer aucune motivation dans son attitude fait bien sûr mauvaise impression.

De même l'emploi d'un ton interrogatif dans l'espoir de déceler chez l'examinateur une confirmation ou une infirmation est à proscrire. Le jury attend *des affirmations*, modestes et révocables mais posées ; des affirmations auxquelles le candidat lui-même croit suffisamment pour désirer les établir.

Or le jury a constaté que de nombreux candidats rechignent à écrire leur début de preuve au tableau, préférant discourir et discuter le problème en un assaut d'éloquence parfois intéressant mais souvent inefficace. Pareil excès de rhétorique ne peut que nuire. Il est louable d'expliquer sa stratégie, mais il importe aussi d'écrire progressivement sa solution, de poser nettement les choses, d'établir fermement les étapes du raisonnement : il importe de savoir canaliser son dynamisme, et de le parer de rigueur.

1.3 Corps de la planche

Un mauvais début d'oral ne disqualifie nullement, la prestation étant jugée sur toute la durée de l'épreuve. Le candidat est donc invité à montrer persévérance et adaptabilité, qualités indispensables au métier de chercheur auquel forment les É.N.S.

Tout ce que nous avons dit des dix premières minutes reste vrai du corps de la planche, où le dialogue est engagé. Celui-ci n'est ni la marque d'un échec, ni une planche de salut où l'examinateur « débloque » le problème pour le candidat : *le dialogue est une autre part de l'évaluation*, où l'on mesure également sa réactivité, sa capacité à remettre en doute une stratégie ; et plus généralement, les germes de sa future habileté au débat scientifique. Cela étant mené sans pour autant brader l'exigence de rigueur.

Réactivité. L'aptitude du candidat à juger qu'une piste est mauvaise et à se relancer sur une autre voie contribue à améliorer la note.

Idem, admettre au cours d'un long raisonnement que l'on n'a pas tout à fait saisi une étape est un signe d'honnêteté scientifique appréciable et qui profite généralement au candidat pour mener à bien son oral : la découverte en fin de planche d'une incompréhension profonde (soigneusement camouflée) de l'exercice étant l'une des pires situations possibles.

Rigueur. Le dialogue n'est pas une simple discussion qualitative.

Entretenir un certain flou est la meilleure façon de commettre des erreurs et de ne pas convaincre l'examinateur. Au contraire, une argumentation claire, progressive, avec un effort de rédaction est fortement valorisée.

Le jury a d'ailleurs toujours exigé tôt ou tard un moment de technicité pure — les explications moins drapées de la rigueur la plus stricte, n'étant consenties qu'au candidat ayant déjà montré sa valeur technique.

Rappelons enfin que la résolution complète ne joue pour ainsi dire qu'à la marge, et permet de distinguer les bons candidats des très bons, la note de 15 étant parfaitement accessible sur un exercice incomplètement traité.

La perception qu'a le candidat de sa prestation est d'ailleurs souvent fausse ; la notation tient naturellement compte de l'inégale difficulté des exercices posés lors de la session d'oraux. Cette dernière remarque doit encore inciter le candidat à rester jusqu'au bout concentré et motivé.

1.4 Sur le cours

Le jury attend une connaissance et une compréhension impeccable du cours ; ainsi qu'une vision claire des articulations entre ses différentes parties. On attend du recul. *Le candidat qui* *se contente d'apprendre des théorèmes en vue de les appliquer n'a tout simplement pas le profil cherché.* Mais encore faut-il les apprendre. Il nous paraît superflu d'insister sur ce point : le cours doit être su.

À l'inverse, la mention de connaissances hors-programme pertinentes a pu être appréciée de l'examinateur, si elle apportait quelque chose à la discussion et qu'elle était faite avec les précautions nécessaires.

Mais une vaste érudition, ou même la manifestation d'un intérêt quelconque pour les mathématiques n'est pas exigible. Et d'ailleurs le jury n'était pas prêt à entendre un candidat invoquer un résultat qu'il n'eût su démontrer ; il doit reconnaître que le cas de figure était rare, et qu'une grande culture mathématique dûment maîtrisée semble être l'apanage des meilleurs candidats.

2 Remarques spécifiques

— Les énoncés ne sont pas formulés avec l'intention de piéger les candidat·e·s. Néanmoins, vérifier, et si besoin préciser, la bonne définition des objets considérés est un réflexe mathématique aussi sain que fondamental, qui se doit d'être acquis après deux ou trois années de classes préparatoires.

— Lors de raisonnements autour d'un élément d'ordre d dans un groupe, de nombreu·x·ses candidat·e·s se ramènent trop souvent, par division euclidienne, à un entier entre 0 et $d-1$, au lieu d'utiliser la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ et la caractérisation de d comme générateur de l'idéal des puissances annulatrices de l'élément. Les démonstrations s'en trouvent inutilement alourdies.

— De manière générale, le jury constate un manque d'aisance, de recul et d'intuition concernant les probabilités. À titre d'exemple (loin de toute exhaustivité), peu de candidat·e·s pensent à retranscrire une probabilité comme l'espérance d'une indicatrice ; l'inégalité de Markov tient du réflexe pavlovien, pas toujours justifié (en particulier, la redémonstration de la loi des grandes nombres n'a pas à être systématique) ; les manipulations basiques sur les événements (typiquement pour majorer la probabilité d'un événement par la probabilité d'un événement qui contient le premier) posent des difficultés.

— Inversement, le niveau en algèbre générale est globalement bon. Par comparaison avec les probabilités, le jury se demande si cela n'est pas dans une certaine mesure lié au fait qu'en algèbre, dans le cadre de la prépa, les solutions sont mieux "formatées" avec des techniques bien travaillées par les candidat·e·s alors qu'en probabilités (et de manière semblable en analyse), certains raisonnements ne reposent pas sur une stratégie sophistiquée mais simplement (comme évoqué ci-dessus) sur des manipulations élémentaires qui devraient apparaître comme assez naturelles dès lors qu'on a un minimum d'intuition sur le problème considéré.

3 Exemples d'exercices et commentaires

Exercice. On considère un ensemble dénombrable G et un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset G^2$. On appelle chemin (de longueur $n \in \mathbb{N}_*$) dans le graphe G un $n+1$-uplets $(x_0, \ldots, x_n)$ de G tel que $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{A}$ pour tout i, et on note $x \to y$ s'il existe un chemin de x à y (i.e. $x_0 = x$, $x_n = y$). On suppose G irréductible au sens $x \to y$ pour tout $x, y \in G$. On appelle période de $x \in G$, notée d_x, le pgcd de l'ensemble des longueurs des chemins qui partent de x et reviennent en x.

1. Montrer que tous les éléments ont la même période (appelée période de G) (indication : on pourra montrer que toute partie de $\mathbb{N}$ stable par addition contient tous les multiples de son pgcd à part un nombre fini).
2. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
   (i) G est de période p
   (ii) p est le plus grand entier positif tel qu'il existe une partition $C_1, \ldots, C_p$ de G telle que pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}$, il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $x \in C_i$ et $y \in C_j$ avec $j = i+1[p]$.
3. On suppose de plus que G est fini. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (i) La période de G est 1 (G est dit apériodique).
   (ii) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x, y \in G$ et tout $k \geqslant n$, il existe un chemin de longueur k de x à y.

Commentaire. Pour la première question, l'indication qu'une partie de $\mathbb{N}$ stable par addition contenait tous les multiplies de son pgcd sauf un nombre fini a été donnée aux candidats bloqués.

Solution.

1. Notons $E_x \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des longueurs de chemin de x vers x. Par définition de la période de x, d_x est le pgcd des éléments de E_x. En concaténant deux chemins on voit que E_x est stable par addition, et donc (démo ci-après) il existe un rang k_0 à partir duquel $kd_x \in E_x$ pour tout $k \geqslant k_0$. Pour $y \in G$, on considère deux chemins, respectivement de x vers y et de y vers x (ces chemins existent par irréductibilité de G). Notons n_{xy} et n_{yx} les longueurs respectives de ces deux chemins. La concaténation d'un chemin de y vers x avec une boucle sur x puis d'un chemin de x vers y, est bien un chemin de y vers y. On en déduit que $n_{yx} + kd_x + n_{xy} \in E_y$ pour tout $k \geqslant k_0$; le pgcd d_y divise donc tous ces nombres, et donc la différence de deux successifs, c'est-à-dire d_x, ce qui conclut car $x, y \in G$ sont arbitraires.

   Pour compléter l'argument précéent, montrons que toute partie A de $\mathbb{N}$ stable par addition contient les multiples de son pgcd à partir d'un certain rang. Pour cela, il suffit de montrer que si $a, b \in A$, alors A contient tous les multiples de $d := a \wedge b$ à partir d'un certain rang (car ensuite on prend un autre $c \in A$ et pd avec p assez grand et p premier avec c et on recommence et on descend en un nombre fini d'étape jusqu'au pgcd de l'ensemble entier). Montrons donc le résultat pour $a, b \in A$ de pgcd d. On écrit $a = kd$ et par le théorème de Bezout, on trouve $u, v \geq 0$ avec $vb - ua = d$. Montrons que $ld + uka$ est dans A pour tout $l \in \mathbb{N}^*$. Par division euclidienne de l par k, on a $l = km + r$ et donc

$$\begin{aligned} ld + uka &= (mk + r)d + uka \\ &= ma + rd + uka \\ &= ma + r(vb - ua) + uka \\ &= ma + rvb - rua + uka \\ &= rvb + a(m + u(k - r)) \end{aligned}$$

   comme $r < k$, on a bien $m + u(k - r) \in \mathbb{N}^*$ donc $a(m + u(k - r)) \in A$. De même, rvb est soit nul soit dans A. Dans tout les cas, la somme est dans A ce qui conclut.

2. Pour le sens direct, on fixe un $x \in G$ et pour $i \in [\![1,p]\!]$ on note C_i l'ensemble des y tels qu'il existe un chemin de x à y de longueur $i[p]$ (notons que $x \in C_p$ car il existe un chemin de longueur multiple de p de x à x). Supposons que $y \in C_i \cap C_j$. Alors, en gardant les notations de la question 1, en allant de y à x par un chemin de longueur n_{yx} puis en revenant par deux chemins différents : l'un de longueur $j[p]$ et l'autre de longueur $i[p]$, on peut trouver deux chemins pour aller de y à y, de longueurs respectives $n_{yx} + i[p]$ et $n_{yx} + j[p]$. Par définition de la période de y, p divise ces deux nombres, donc leur différence, donc $i = j[p]$ et $i = j$ (puisqu'ils sont dans $[\![1,p]\!]$). D'autre part le graphe est irréductible donc tout y appartient à un certain C_i. Donc les C_i forment bien une partition de G. Considérons une arrête $(y,z) \in \mathcal{A}$ avec $y \in C_i$. Alors il existe un chemin de longueur $i[p]$ de x à y et donc, en concaténant avec l'arrête (y,z), un chemin de longueur $i+1[p]$ de x à z, donc $z \in C_{i+1[p]}$.

   Il reste à montrer qu'on ne peut pas trouver une partition plus grande avec la même propriété. Étant donnée une telle partition $C_1, \dots, C_r$, un chemin de longueur n partant de $x \in C_i$ aboutit nécessairement à un point de C_j avec $j = i + n[r]$, la période de x est donc nécessairement un multiple de r, ce qui conclut.

   Pour le sens réciproque, on vient de voir que l'existence d'une telle partition $C_1, \dots, C_p$ impliquait que la période de G est un multiple de p. Si elle était plus grande, par l'étude du sens direct, on pourrait construire une partition $C'_1 \dots C'_r$ de G avec $r > p$ et la même propriété que les C_i, or on a supposé que p était maximal, c'est donc impossible.

3. Pour (i)$\Rightarrow$(ii). Par la question 1 on sait que pour tout $x \in G$, E_x contient tous les entiers à partir d'un certain rang k_x, on pose :

$$k_* = \max\{k_x, x \in G\}.$$

   Pour $x, y \in G$, notons n_{xy} la longueur (non nulle) du plus court chemin de x à y et définissons :

$$n_* = \max\{n_{xy}, x, y \in G\}$$

   Montrons que l'entier $k_* + n_*$ répond à la condition (ii). Soit $x, y \in G$ et $k \geqslant k_* + n_*$. Remarquons que $k - n_{xy} \geqslant k_* \geqslant k_x$ donc il existe un chemin de longueur $k - n_{xy}$ de x vers x. On concatène ce chemin avec le chemin minimal de x à y, il existe alors un chemin de longueur $(k - n_{xy}) + n_{xy} = k$ de x à y, ce qui conclut.

   Le sens (ii)$\Rightarrow$(i) est évident puisqu'en particulier E_x contient tous les entiers supérieurs à n, dont le pgcd est 1.

□

Exercice.

1. Donner une famille de matrices linéairement indépendantes, commutant 2 à 2, de cardinal $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$ dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer qu'une famille d'endomorphismes $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ commutant 2 à 2 sont trigonalisables dans une même base (remarque : la famille n'est pas nécessairement finie, ni dénombrable).
3. Montrer que le cardinal maximal d'une famille de matrices de $M_n(\mathbb{C})$ linéairement indépendantes, commutant 2 à 2 est $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$.

Commentaire. Pour la troisième question, l'indication suivante était donnée : Une fois la famille trigonalisée, montrer que l'espace vectoriel engendré par celle-ci contient des matrices linéairement indépendantes de la forme $\begin{pmatrix} t_i \\ \hline \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix}$ (avec t_i un vecteur ligne).

Solution.

1. Considérons la famille des matrices élémentaires $E_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq n$. Ces matrices commutent bien 2 à 2 et sont bien linéairement indépendantes vu les indices i, j choisis. Rappelons en effet la formule $E_{i,j}E_{i',j'} = \delta_{j,i'}E_{i,j'}$ qui garantit donc que les produits sont nuls et (car il n'est pas possible que $i' = j$) et donc commutent : $E_{i,j}E_{i',j'} = 0 = E_{i',j'}E_{i,j}$. D'autre part, en distinguant suivant la parité de n, on vérifie que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. En ajoutant la matrice I_n à la famille précédente, on obtient donc les propriétés voulues (commutation, indépendance et cardinalité).
2. Plusieurs démonstrations sont possibles, par exemple :
   (a) **Montrons déjà qu'il existe un vecteur propre commun à tous les u_i ($i \in I$).** Par récurrence sur la dimension n. Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$. Si tous les u_i sont des homothéties, le résultat est établi. Sinon, il existe un endomorphisme u de la famille qui n'est pas une homothétie et qui est trigonalisable. Il admet donc une valeur propre λ ; considérons E_λ l'espace propre associé. On a $\dim E_\lambda < n$ et ce sous-espace vectoriel est stable par tous les u_i (car ils commutent tous à u). Par hypothèse de récurrence, il existe un vecteur propre commun aux induits $u_{i|E_\lambda}$ ($i \in I$) qui est évidemment un vecteur propre commun aux endomorphismes u_i ($i \in I$).
   (b) **Montrons que les u_i sont cotrigonalisables, par récurrence sur la dimension n.** Par le premier point, il existe $x \in E$ vecteur propre commun à tous les u_i ($i \in I$). Complétons x en une base $B = (x, e_2, \ldots, e_n)$ de E et notons p la projection sur $F = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ parallèlement à $\mathbb{C}x$. Remarquons que matriciellement, il est facile de voir que les endomorphismes $p \circ u_{i|F} \in \mathcal{L}(F)$ sont trigonalisables et commutent (les regarder dans la base B par exemple). Par hypothèse de récurrence, il existe une base B_F de F qui trigonalise simultanément les endomorphismes $p \circ u_{i|F} \in \mathcal{L}(F)$. Dans la base $B' = (x, B_F)$, on vérifie que les endomorphismes u_i sont représentés par des matrices triangulaires supérieures, car :
$$\mathrm{Mat}_{(x,B_F)}(u_i) = \left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{Mat}_{B_F}(p \circ u_{i|F}) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$
3. On le fait par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Pour l'hérédité, soit $\mathcal{F}$ notre famille de matrices dans $M_n(\mathbb{C})$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \geq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2$. D'après la question précédente, des matrices complexes commutant 2 à 2 sont co-trigonalisables. Quitte à se placer dans une base de co-trigonalisation (ce qui revient à considérer la famille $P\mathcal{F}P^{-1}$ pour un certain $P \in GL_n(\mathbb{C})$), on peut supposer que les matrices de $\mathcal{F}$ sont toutes triangulaires supérieures. Notons $A_1, \ldots, A_{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2}$ une famille linéairement indépendante de matrices de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, qui sont de la forme :

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} & n_i \\ \hline 0 & \\ \vdots & M_i \\ 0 & \end{array}\right) .$$

où n_i est un vecteur ligne et M_i est une matrice $(n-1)\times(n-1)$ triangulaire supérieure. Remarquons déjà que la commutativité 2 à 2 des matrices A_i implique la commutativité 2 à 2 des matrices M_i. Notons W l'espace vectoriel engendré par les matrices $M_1, \ldots, M_{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2}$ et $k := \dim W$. Par hypothèse de récurrence au rang $n-1$, on sait que :

$$k \leq \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1.$$

Quitte à renuméroter les matrices, on suppose que les matrices $M_1, \ldots, M_k$ forment une base de W. Pour $i > k$, décomposons les matrices M_i sur cette base :

$$M_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i,j} M_j.$$

En réutilisant les mêmes coefficients $\lambda_{i,j}$, considérons les matrices de taille n, pour $i > k$, :

$$B_i = A_i - \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i,j} A_j \qquad \text{qui sont de la forme} \left(\begin{array}{c} t_i \\ \hline \\ 0 \\ \\ \end{array}\right) \quad \text{avec } t_i \text{ vecteur ligne.}$$

Remarquons que les matrices $B_{k+1}, \ldots, B_{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2}$ sont linéairement indépendantes car les $A_1, \ldots, A_{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2}$ le sont, et donc il en est de même des vecteurs (lignes) $t_{k+1}, \ldots, t_{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2}$.

Par le même raisonnement, mais cette fois en regardant les matrices sous la forme

$$A_i = \left(\begin{array}{ccc|c} & \tilde{M}_i & & \tilde{n}_i \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)$$

où $\tilde{n}_i$ est un vecteur colonne et $\tilde{M}_i$ est une matrice $(n-1)\times(n-1)$ triangulaire supérieure, on peut trouver des matrices $\tilde{B}_{s+1}, \ldots, \tilde{B}_{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2}$ (où $s = \dim \mathrm{Vect}(\tilde{M}_1, \ldots))$ linéairement indépendantes qui sont de la forme $(0|t'_i)$ avec t'_i un vecteur colonne. Notamment, les vecteurs colonnes $t'_{s+1}, \ldots, t'_{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2}$ sont linéairement indépendants.

Maintenant, utilisons les matrices B_i et $\tilde{B}_j$ simultanément. Ces matrices commutent 2 à 2 car sont construites par combinaisons linéaires à partir des A_i qui commutent eux-mêmes 2 à 2. En écrivant cette condition de commutativité 2 à 2, il vient :

$$t_i t'_j = 0 \quad \text{pour} \left\{ \begin{array}{l} i = k+1, \ldots, \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2 \\ j = s+1, \ldots, \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2 \end{array} \right. .$$

Finissons alors en considérant la matrice T de dimension $(\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - k + 2) \times n$ dont la i-ème ligne est t_i. Cette matrice est de rang $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - k + 2$ (les lignes étant linéairement indépendantes). De plus, les vecteurs t'_j sont dans le noyau de T grâce à ce qui précède. On en déduit que $\dim \ker T \geq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - s + 2$.
Le théorème du rang implique l'inégalité :

$$\begin{aligned} n &\geq \left(\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - k + 2 \right) + \left(\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - s + 2 \right) \\ &\geq 2 \left(\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor - \lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1 \right) \\ &\geq 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2. \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction. La seconde inégalité vient de l'hypothèse de récurrence qui donne une majoration de k et s par $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + 1$. La troisième peut se voir en distinguant selon la parité de n.

□

Exercice. Soit $\alpha > 0$. Soit $(B_i,\, i \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli telles que

$$\mathbb{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(B_i = 0) = \frac{1}{i^\alpha} \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*.$$

On considère l'ensemble aléatoire $S := \{i \in \mathbb{N}^*,\, B_i = 1\}$.

1. Discuter, en fonction de α, si l'ensemble S est infini.
2. On suppose maintenant $\alpha < 1$. Soit $\beta > 0$. On définit la variable aléatoire

$$N = \sup\{n \in \mathbb{N}^* \;:\; S \cap [n, n + n^\beta] = \emptyset\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}. \tag{1}$$

   avec la convention $\sup \emptyset = 0$. Discuter en fonction de β la finitude de N.
3. On suppose maintenant $\alpha < \frac{1}{2}$. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ (aléatoire) tel que,

$$\lfloor a^{2^n} \rfloor \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Remarque. Le résultat de la question 3 reste vrai (avec un 3^n au lieu d'un 2^n) si l'ensemble aléatoire S est remplacé par l'ensemble des nombres premiers : a est alors appelé "nombre de Mills". La preuve est identique une fois l'estimée de la question 2 obtenue pour les nombres premiers.

Solution. 1. Il s'agit d'une application du Lemme de Borel-Cantelli que l'on montre directement. Tout d'abord, si $\alpha > 1$, on a

$$\mathbb{E}[\#S] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_i = 1}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i = 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} < \infty$$

donc $\#S$ est une v.a. d'espérance finie donc elle est fini p.s. et donc S est fini p.s. Réciproquement, si $\alpha \leq 1$, par indépendance de B_i, on a

$$\mathbb{P}(\sup S < n) = \mathbb{P}(S \cap [n, \infty) = \emptyset) = \prod_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_i = 0) = \prod_{i=n}^{\infty} (1 - \frac{1}{i^\alpha}) = 0$$

ce qui montre que $\mathbb{P}(S \text{ est fini}) = \mathbb{P}(\sup S < \infty) = \lim_n \uparrow \mathbb{P}(\sup S < n) = 0$ donc S est infini p.s.

2. On montre que N est fini si et seulement si $\beta > \alpha$. Comme $\alpha < 1$, il suffit de montrer le résultat lorsque $\beta < 1$ (par monotonie de la propriété en β). Par indépendance des B_i, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \cap [n, n+n^\beta] = \emptyset) = \prod_{n \leq i \leq n+n^\beta} \left(1 - \frac{1}{i^\alpha}\right) &= \exp\left(\sum_{n \leq i \leq n+n^\beta} \log\left(1 - \frac{1}{i^\alpha}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n \leq i \leq n+n^\beta} \left(\frac{1}{i^\alpha} + o(\frac{1}{i^\alpha})\right)\right) \end{aligned}$$

On a l'encadrement $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{i^\alpha} \leq \frac{1}{(n+n^\beta)^\alpha}$ pour chaque terme dans la somme ci dessus. Puisque $\beta < 1$, il vient donc $\sum_{n \leq i \leq n+n^\beta} \frac{1}{i^\alpha} \sim n^{\beta-\alpha}$ ce qui prouve

$$\mathbb{P}(S \cap [n, n+n^\beta] = \emptyset) = \exp\left(-n^{\beta-\alpha} + o(n^{\beta-\alpha})\right)$$

Supposons d'abord $\beta > \alpha$. On pose $U := \sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{\{S \cap [n, n+n^\beta] = \emptyset\}}$. Comme pour la question 1, on a

$$\mathbb{E}[U] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S \cap [n, n+n^\beta] = \emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^{\beta-\alpha} + o(n^{\beta-\alpha})\right) < \infty.$$

donc U est une v.a. d'espérance finie donc, a fortiori finie p.s. Cela implique que N est finie p.s. Réciproquement, si $\beta \leq \alpha$, alors, on a vu que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S \cap [n, n+n^\beta] = \emptyset) \geq \frac{1}{e}.$$

On peut donc trouver une suite d'entiers (n_i) telle que

$$n_1 < n_1 + n_1^\beta < n_2 < n_2 + n_2^\beta < n^3 < \dots$$

avec de plus

$$\mathbb{P}(S \cap [n_k, n_k + n_k^\beta] = \emptyset) \geq \frac{1}{2e} \quad \text{pour tout } k.$$

Dans ce cas, les événements $(\{S \cap [n_k, n_k + n_k^\beta] = \emptyset\}, k \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendants (car ils ne dependent pas des mêmes B_i) donc, puisque $n_j > j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N < k) &= \mathbb{P}(S \cap [j, j+j^\beta] \neq \emptyset \text{ for all } j \geq k.) \\ &\leq \mathbb{P}(S \cap [n_j, n_j + n_j^\beta] \neq \emptyset \text{ for all } j \geq k.) \\ &= \prod_{j \geq k} \mathbb{P}(S \cap [n_j, n_j + n_j^\beta] \neq \emptyset) \\ &\leq \prod_{j \geq k} \left(1 - \frac{1}{2e}\right) = 0. \end{aligned}$$

On conclut que $\mathbb{P}(N=\infty) = 1 - \mathbb{P}(N<\infty) = 1 - \lim_k \uparrow \mathbb{P}(N<k) = 1$.

3. Le résultat est vrai pour tout ensemble S qui vérifie que N donné par (1) avec $\beta = \frac{1}{2}$ est fini, et on a montré que c'est le cas lorsque, justement, $\alpha < \frac{1}{2}$. Comme N est p.s. fini, on peut construire p.s. une suite (s_n) vérifiant $s_1 \in S$ et $s_1 > N$ puis, par récurrence

$$s_{n+1} \in [s_n^2, s_n^2 + s_n] \cap S \quad \text{pour tout } n.$$

Mais alors, comme $s_n^2 + s_n < (1+s_n)^2$, il vient

$$s_n^2 \leq s_{n+1} < (1+s_n)^2 \quad \text{pour tout } n.$$

On pose $u_n = s_n^{2^{-n}}$ et $v_n = (1+s_n)^{2^{-n}}$. On a donc $u_n \leq v_n$. De plus

$$u_n = (s_n^2)^{2^{-(n+1)}} \leq (s_{n+1})^{2^{-(n+1)}} = u_{n+1}$$

donc (u_n) est une suite croissante et, de même,

$$v_n = (1+s_n)^{2^{-n}} = ((1+s_n)^2)^{2^{-(n+1)}} > s_{n+1}^{2^{-(n+1)}} = v_{n+1}$$

donc (v_n) est une suite strictement décroissante. Fixons $a \in \mathbb{R}$ avec $\lim_n \uparrow u_n \leq a \leq \lim_n \downarrow v_n$. alors, pour tout n,

$$u_n = s_n^{2^{-n}} \leq a < (1+s_n)^{2^{-n}} = v_n$$

et donc

$$s_n \leq a^{2^n} < s_n + 1.$$

En prenant la partie entière on trouve donc bien $\lfloor a^{2^n} \rfloor = s_n \in S$ pour tout n.

□

Exercice. On considère $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ l'espace des fonctions continues, muni de la norme de la cv. uniforme. Étudier la continuité (et déterminer les points de discontinuité le cas échéant) des fonctionnelles suivantes.

1. Étudier $H_1 : f \to \sum_{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap]0,1[} \frac{f(p/q)}{q^3}$ ou p/q est la représentation réduite du rationnel correspondant.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante fixée. Étudier $H_2 : f \to \sup_{t \in [0,1]} (g \circ f)(t)$.
3. Étudier $H_3 : f \to \inf\{t \in [0,1] : f(t) = \sup_{[0,1]} f\}$.

Solution. 1. Commençons par observer que H_1 est bien définie. La série est absolument convergente car $|f|$ est bornée et il n'y a pas plus de q rationnels avec dénominateur q. Donc

$$|H_1(f)| \leq \sum_{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap]0,1[} \frac{|f(p/q)|}{q^3} \leq ||f||_\infty \sum_q \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2 ||f||_\infty}{6} < \infty.$$

Puisque H_1 est linéaire, on en déduit donc qu'elle est $\pi^2/6$ lipschitzienne et donc continue partout.

2. Remarquons que $g \circ f$ est bornée car g est croissante et f est bornée donc

$$||g \circ f||_\infty \leq \max(|g(-||f||_\infty)|, |g(||f||_\infty)|).$$

Donc H_2 est bien définie. De plus, par croissance de g, on a

$$\sup_{t\in[0,1]} g \circ f(t) = g(\sup_{t\in[0,1]} f(t)).$$

La fonctionnelle $\tilde{H} : f \to \sup_{t\in[0,1]} f(t)$ est continue car 1-lipschitzienne puisque $|\tilde{H}(f) - \tilde{H}(h)| \leq ||f - h||_\infty$. On a

$$H_2 = g \circ \tilde{H}.$$

Les points des discontinuité de H_2 sont donc les fonctions f pour lesquelles $\tilde{H}(f)$ est un point de discontinuité de g. En effet, si f est telle que $\tilde{H}(f) = x$ est un point de continuité de g, alors pour toute suite de fonctions (f_n) convergeants uniformément vers f on a $H_2(f_n) \to H_2(f)$ par composition, ce qui montre la continuité en f. Réciproquement, si x est un point de discontinuité de g, on peut trouver une suite (x_n) qui converge vers x telle que $g(x_n)$ ne converge pas vers $g(x)$. Soit maintenant f une fonction quelconque avec $\tilde{H}(f) = x$, on pose $f_n(z) = f(z) - x + x_n$. Alors $H_2(f_n) = x_n$ qui ne converge pas vers $x = H_2(f)$ donc H_2 n'est pas continue en f.

Finalement, en notant $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points de discontinuité de g, on a donc montré que l'ensemble des points de discontinuité de H_2 est

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \, : \, \sup_{[0,1]} f \in \mathcal{D}\}.$$

3. H_3 n'est pas continue. On montre que l'ensemble des points de continuité est exactement l'ensemble des fonctions dont le supremum est atteint en un unique point de $[0,1]$. Soit f une telle fonction et notons $z := H_3(f) \in [0,1]$ la position de l'unique maximum de f et notons $m := f(z)$ sa valeur. Soit f_n une suite de fonction convergeant uniformément vers f. On se fixe $\varepsilon > 0$, le maximum de f sur $[0,1] \setminus [z-\varepsilon, z+\varepsilon]$, noté m_ε est strictement plus petit que m. posons donc $\eta = m - m_\varepsilon > 0$. Alors, dès que $||f_n - f||_\infty < \eta/3$, on a forcement $H_3(f_n) \in [z - \varepsilon, z + \varepsilon]$. Ceci montre la continuité de H_3 en f.

   Réciproquement, soit f est une fonction continue qui atteint son maximum en au moins deux positions distinctes, disons $0 \leq z_1 < z_2 \leq 1$. On fixe a, b tels que $z_1 < a < b < z_2$. Soit g_n la suite de fonctions continues, linéaires par morceaux, avec $g = 0$ sur $[0, a]$, $g = 1/n$ sur $[b, 1]$ et linéaire sur $[a, b]$. On pose $f_n = f + g_n$. Alors, f_n converge uniformément vers f pourtant $H_3(f) \leq z_1$ alors que $H_3(f_n) \geq z_2$ ce qui nie la continuité de H_3 en f.

   Finalement, on a montré que l'ensemble des points de discontinuité de H_3 est

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \, : \, \exists x \neq y \, \sup_{[0,1]} f = f(x) = f(y)\}.$$

$\square$