# Banque PC Inter-ENS - Session 2019

## Rapport du jury de l'épreuve orale de mathématiques

Guillaume Aubrun, Oriane Blondel, François Brunault, Adrien Le Boudec

Coefficients (pourcentage du total d'admission) : Ulm 17,1 % - Lyon 7 %.

Commes les années précédentes, l'épreuve de mathématiques s'est déroulée à l'ENS de Lyon, en parallèle avec les travaux pratiques de chimie. Il s'agit d'une épreuve de 45 minutes, sans préparation. 239 candidat·es ont été interrogé·es.

## 1 Commentaires

Le niveau d'ensemble du concours est excellent, et le jury a été impressionné par quelques candidat·es à l'intuition mathématique remarquable.
Nous encourageons les futurs candidat·es à prêter attention aux commentaires issus des rapports des années précédentes. En plus de ceux-ci, nous mentionnons les points suivants :

1. Il est regrettable de voir que de nombreux candidat·es, face à un problème dont ils ou elles ne perçoivent pas immédiatement la solution, se réfugient dans des calculs visiblement inextricables. Il est bien souvent préférable de faire un dessin ou de traiter un cas particulier du problème afin de se faire une opinion sur la stratégie à adopter. Par exemple, pour une matrice $M$ de taille 2 fois 2 et face à un énoncé faisant intervenir $M^3$, se donner les 4 coefficients inconnus de $M$ et calculer les coefficients de $M^3$ est rarement prometteur.
2. Un certain nombre de candidat·es ont montré de surprenantes lacunes en probabilités. Bien que la plupart des candidat·es interrogé·es soient à l'aise avec les lois usuelles, le jury a été étonné des maladresses, du manque de sens pratique et de la difficulté qu'ont certain·es candidat·es à interpréter certains calculs. On entend par exemple trop souvent « la proba de l'union est égale à la somme des probas par indépendance des événements ».

3. Certain·es candidat·es souhaitant appliquer un théorème du cours oublient de vérifier que ses hypothèses sont vérifiées. Pour un théorème donné, il est bon de savoir quelles sont les hypothèses importantes.
4. Il est parfois très pertinent d'expliquer pourquoi telle approche ou tel calcul n'aboutit pas, ou ne va pas aboutir. De manière générale, toute prise de recul par rapport à l'exercice et à sa résolution est très appréciée.

## 2 Exemples d'exercices posés

**Exercice 1**. Soit $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Existe-t-il une norme $N : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $N(M) = N(PMP^{-1})$ pour tout $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 2**. On fixe un sous-espace vectoriel $V$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $X$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, dont les coordonnées sont des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{-1, 1\}$. Soit $\delta_V$ la distance euclidienne de $X$ à $V$.

(a) Montrer que $\mathrm{E}(\delta_V^2) = n - d$ avec $d = \dim V$ (on pourra commencer par le cas $n = 2$).

(b) Montrer que $\mathrm{V}(\delta_V^2) \leq 2d(1 - d/n)$.

(c) En déduire que pour $d \leq n - 6$, on a $P\Big(\big|\delta_V - \sqrt{n-d}\big| \geq 2\Big) < 1/2$.

**Exercice 3**.

1. Soit $f$ une fonction réelle définie au voisinage de 0. On suppose que pour toute suite $(a_n)$, $\sum_n a_n$ converge implique $\sum_n f(a_n)$ converge. Montrer que $f(x)/x$ est bornée au voisinage de 0.
2. Cette condition est-elle suffisante ?
3. Trouver toutes les fonctions dérivables en 0 vérifiant la propriété.
4. Montrer qu'il existe $(a_n)$ telle que $\sum_n a_n^3$ diverge mais $\sum_n \tan a_n$ converge.

**Exercice 4**.

1. Soit $A \subset M_n(\mathbb{R})$ une partie convexe. On suppose que $O_n \subset A$. Est-ce que $A$ est nécessairement d'intérieur non vide ?
2. Même question en supposant seulement $SO_n \subset A$.