École des Ponts Paris Tech
Rapport sur l'épreuve orale de mathématiques Filière BCPST - Année 2019

Coefficient (en pourcentage du total d'admission) : 20%
Membres du jury : Anne-Sophie Guinotte, Clémentine Portal

Présentation de l'épreuve

L'épreuve d'Oral de Mathématiques de l'école des Ponts concours BCPST dure 50 minutes précédée de 15 minutes de préparation. Elle consiste en deux exercices permettant de balayer une vaste partie du programme de mathématiques des 2 années de classe préparatoire. Elle ne comporte pas d'informatique. Quelle qu'ait été la préparation du candidat, les deux exercices seront abordés pendant l'oral, permettant ainsi au jury de juger aussi le candidat sur sa réactivité face à des questions nouvelles auxquelles il n'aura pas eu le temps de réfléchir pendant les 15 minutes de préparation.

On attend du candidat qu'il sache traiter d'emblée des questions classiques. En revanche il est légitime sur des questions plus difficiles qu'il soit amené à réfléchir et à proposer des pistes qui n'aboutiront pas du moment qu'elles sont cohérentes et justifiées par rapport à l'exercice, et démontrent à la fois une bonne connaissance du cours et un esprit d'initiative. Le jury rappelle que son rôle est d'évaluer afin de classer, ce qui l'amène à interroger les candidats. Cet oral n'est pas un « écrit au tableau » mais bien un dialogue pertinent sur les mathématiques.

Observations du jury

Les remarques sur la gestion du tableau énoncées l'année dernière ont été bien prises en compte par les candidats et le jury s'en félicite.

En analyse, dans le problème banal de convergence de séries ou d'intégrales, de nombreux candidats rédigent mal le critère de comparaison, passant directement de l'inégalité sur des termes ou des fonctions à intégrer à l'inégalité sur des sommes de séries ou des intégrales impropres. Le jury rappelle que ce critère de comparaison permet d'*étudier la convergence* d'une série *à termes positifs* ou intégrale *de fonction positive*, et qu'il est essentiel de prouver la convergence de séries ou d'intégrales avant d'affirmer des inégalités entre elles.

De plus le jury rappelle que le seul critère de comparaison au programme de BCPST est celui qui utilise des inégalités. Si un candidat veut utiliser des équivalents, ou un critère de négligeabilité, il doit savoir se ramener rapidement ensuite à des inégalités pour utiliser le seul critère de comparaison au programme. Enfin ni les séries de Riemann (à part la série harmonique et celle des 1/n^2), ni les intégrales de Riemann ne sont au programme de BCPST. Là aussi, s'il veut les utiliser, le candidat doit savoir prouver leur convergence ou divergence.

Plus généralement, si un candidat veut utiliser des notions hors programme (équivalent pour des convergences de séries ou intégrales, trace d'une matrice carrée pour une recherche de valeurs propres) il doit savoir les justifier.

De manière générale les candidats font des efforts de rigueur dans la rédaction et maîtrisent le formalisme mathématique (définition des variables utilisées, emploi de quantificateurs), ce qui est apprécié. Ces qualités sont importantes pour des études à l'ENPC, et les candidats qui les négligent sont susceptibles d'être sanctionnés.

Comme les années précédentes, le jury a noté que les candidats présents sont toujours corrects et courtois. Il rappelle cependant que les démissions doivent être signalées le plus tôt possible.

Deux exemples de sujets donnés cette année sont donnés à la suite de ce rapport.

Sujet

Vous commencerez obligatoirement par exposer le premier exercice.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note id_E l'application identité de E.
Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément $\vec{a}$ de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(\vec{a}) = \vec{a}$
- la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a}))$ est génératrice de E
- la famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a}))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{p-1}(\vec{a}))$ est alors appelée cycle de f.

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f : (x, y) \mapsto (-y, x)$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
   (b) En considérant $\vec{a} = (1, 0)$, observer que f est cyclique d'ordre p, l'entier p étant à préciser.
2. Dans cette question $E = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ engendré par les fonctions sin et cos, où $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer une base de E.
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1; 2\}$. Pour $f \in E$, on note $\tau_p(f)$ l'application définie par $\tau_p(f) : x \mapsto f\left(x + \dfrac{2\pi}{p}\right)$.
   Montrer que $\tau_p(f) \in E$.
   (c) Montrer que $\tau_p : f \mapsto \tau_p(f)$ est un endomorphisme de E.
   (d) On pose $f = \sin$. Exprimer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\tau_p^k(f)$ en fonction des vecteurs de la base de E trouvée en **2.a**.
   Montrer que pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, on a $\tau_p^k(f) = \tau_p^\ell(f) \iff k \equiv \ell\ [p]$.
   (e) Montrer que τ_p est cyclique d'ordre p.

Exercice 2

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone, puis déterminer son sens de variation en fonction de la valeur de x_0.
   (b) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h\left(\mathrm{Arctan}(x)\right)$.

Sujet 11

Vous commencerez obligatoirement par exposer le premier exercice.

Exercice 1 : Intégrales de Dirichlet

Soit f la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $f : x \to \displaystyle\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)\,dt$

1. (a) Montrer que f est bien définie sur $]0,\pi]$.

   (b) Montrer que f admet en prolongement par continuité en $x=0$.

2. On pose $I = f(\pi)$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(2\cos\frac{t}{2}\right)\,dt$.

   (a) Montrer que $I = J$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)\,dt = I$

   (c) En utilisant $I+J$ et les résultats de (a) et (b), montrer que $I=0$.

3. (a) Donner une expression de $\displaystyle\int_0^x \ln t\,dt$.

   (b) Déterminer la limite quand $x \to 0,\ x>0$ de $\dfrac{f(x)}{x}$. (*On pourra utiliser l'inégalité* $\sin u \leqslant u$ *pour* $u \in \mathbb{R}^+$)

4. (a) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$: $f(x) = \displaystyle\int_\pi^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)\,dt$.

   (b) En déduire que f est dérivable sur $]0,\pi]$, donner sa dérivée, et étudier les variations de f sur $[0,\pi]$.

Exercice 2

Une salle de spectacle contient N sieges avec $N \geqslant 1$. Un spectateur étourdi a perdu son billet et ne connait plus le numéro de sa place. Il arrive à se faufiler en premier dans la salle et prend un siege au hasard. Puis les autres spectateurs rentrent dans la salle un par un et s'installent à leur place (soit elle est directement libre, soit elle est occupée par l'étourdi à qui ils demandent de bouger, et l'étourdi reprend un siege au hasard dans les places vides restantes).

On suppose que tous les billets sont vendus.

On pose X_N la variable aléatoire égale au nombre de changements de place effectués par l'étourdi.

1. (a) Déterminer $X_N(\Omega)$.

   (b) Calculer $P(X_N=0)$ et $P(X_N=N-1)$

2. Pour $N \geqslant 2$, en considérant ce que fait la première personne entrant dans la salle de spectacle apres l'étourdi, écrire une relation de récurrence entre $P(X_N=k)$ et $P(X_{N-1}=k), P(X_{N-1}=k-1)$, pour $k \in [\![1\,;\, N-1]\!]$. Retrouver ainsi la valeur de $P(X_N=N-1)$.

3. (a) Ecrire une relation de récurrence entre $E(X_N)$ et $E(X_{N-1})$.

   (b) En déduire l'expression de l'espérance de X_N.