Rapport sur l'épreuve « Mathématiques D »

ENS, filière MPI (2019)

Régis de la Bretèche (concepteur et correcteur)

Alexandre Afgoustidis, Kevin Destagnol,
Charles Fougeron, Thomas Gauthier (correcteurs)

Il s'agissait de développer des outils d'analyse (propres à la théorie analytique des nombres), puis de théorie des groupes et d'algèbre linéaire, pour donner, lorsque p est un nombre premier congru à 3 modulo 4 et f est une fonction arithmétique impaire p-périodique à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et non-nulle, la non-nullité de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_k(n) f(n)/n$ est nulle où $\tau_k(n)$ est le nombre de manière d'écrire n comme produit de k entiers. Ainsi, le sujet portait sur un large éventail de notions au programme.

Le sujet a été inspiré par un article récent de Sandro Bettin et Bruno Martin qui explore le cas où la fonction f est à valeurs dans une extension K de $\mathbb{Q}$: *On the non-vanishing of certain Dirichlet series*, Journal Number Theory, **180** (2017), 423–442 disponible gratuitement à l'adresse https ://arxiv.org/abs/1704.08358.

Le sujet était long et personne n'a pu en traiter l'intégralité, même si chaque question a reçu au moins une réponse correcte. Cette longueur n'était pas une invitation à une course de vitesse, mais plutôt conçue pour donner la possibilité aux candidats de creuser une partie de leur choix. Certains candidats réussissent d'ailleurs bien en n'ayant regardé que les deux premières parties : traiter entièrement (et correctement) deux des quatre parties suffisait à obtenir une très bonne note (¿ 16/20). Très peu de copies cherchent les questions 18, 22, 23, 24 et 25 : il n'était évidemment pas nécessaire de les avoir faites pour obtenir un excellent résultat.

L'épreuve de cette année comportait assez peu de questions correspondant à des classiques des classes préparatoires, à l'exception peut-être des questions 7, 8 et 19. Il fallait donc savoir relier les connaissances acquises en CPGE à un problème de mathématiques largement inédit.

Le sujet contient malheureusement quelques coquilles. Elles sont détaillées dans les commentaires concernant chaque question. Il nous a cependant semblé, à la correction, que ces coquilles n'avaient pas été très handicapantes pour les candidats.

Les correcteurs ont pris soin de ne donner des points qu'aux questions entièrement traitées. Ainsi, un calcul intermédiaire qui n'aboutit pas à la solution n'est pas récompensé. Une statistique qui illustre ce choix : 87% des questions traitées ont eu tous les points ou aucun. De même, grapiller des points en traitant les rares questions faciles ne permet jamais d'obtenir une note satisfaisante. Même si cela est rappelé chaque année, il est important de soigner la présentation et d'avoir une écriture lisible. Une réponse rédigée avec une écriture illisible ne peut être évaluée.

Il y a eu 1212 copies corrigées. Ont été attribuées 40 notes supérieures ou égales à 16 et environ 170 notes supérieures ou égales à 10.

Remarques générales sur les copies

Certaines réponses ont surpris les correcteurs. Ainsi « si G contient des éléments d'ordres respectifs s et t, alors G contient un élément d'ordre $\mathrm{ppcm}(s,t)$ ». De nombreuses copies écrivent des relations du genre $s/\mathrm{pgcd(s,t)}$ et t sont premiers entre eux ou $\mathrm{ppcm}\big(s/\mathrm{pgcd(s,t)}, t/\mathrm{pgcd(s,t)}\big) = \mathrm{ppcm}(s,t)$. Il est à espérer que ces erreurs sont dues au stress de l'épreuve. Elles apparaissent même dans de très bonnes copies.

Comme à l'habitude, une certaine concision des arguments était appréciée et permettait de traiter plus de questions mais elle ne doit pas déboucher sur des réponses non complètes où on semble laisser le correcteur finir l'argument ou où on oublie des arguments. Une question la plus emblématique est la 9b : un certain nombre de copies commencent la récurrence en utilisant la méthode de l'hyperbole comme suggéré dans l'énoncé mais très rares sont ceux qui parviennent au choix de y qui fournit le résultat. Aucun point n'a été donné à ceux qui n'avaient pas traité entièrement la question. Aussi, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel il faut vérifier qu'il est non vide. Ce type d'oublis a été pénalisé. Certaines questions ont donné lieu à des réponses de plusieurs pages alors que des solutions simples en trois lignes existaient.

Certaines des questions les plus difficiles se trouvaient en début de devoir : ainsi la question 3 ou la question 4c n'ont été bien traitées que dans les meilleures copies (141 copies pour la 3 et et 78 pour la 4c ont bien fait ces questions).

I– Séries de Dirichlet et formules de sommation.

La première partie permettait d'établir des résultats concernant les séries de Dirichlet. Elle faisait appel à des notions de base concernant les manipulations de sommes infinies et le calcul des intégrales. Certaines questions (la 3 et la 4c) étaient difficiles.

1. Certains oublient le cas $p = 2$ pour lequel on pouvait montrer que f est nulle. Il y avait moyen de traiter le cas pair et impair dans une seule et même manipulation.

2. Dans l'énoncé, il manquait l'hypothèse $g \in C^1$. Quelques rares copies ont relevé cette erreur. Il existait plusieurs manières de traiter la question en quelques lignes, alors que beaucoup de copies mettent plus d'une page.

3. Cette question délicate a été réussie dans moins de 150 copies. Très peu de copies utilisent un dessin pour soutenir leur intuition. Là encore, on pouvait traiter cette question en très peu de lignes alors que beaucoup de copies se perdent dans des calculs longs et fastidieux. Ceux qui veulent repasser aux parties entières en faisant intervenir $[x/n]$ ou $[x/y]$ se compliquent considérablement la tâche alors que l'esprit du problème était autre.

4a. La convergence de la série de terme général n^{-s} lorsque $s > 1$ est considérée comme du cours. Il n'était pas nécessaire de la redémontrer.

4b. Certaines rédactions sont un peu lourdes pour une question finalement simple. Un nombre non négligeable de copies parlent du produit de Cauchy propre aux séries entières.

4c. Dans l'énoncé, il manquait l'hypothèse de la convergence absolue de la série de Dirichlet. De nombreuses copies la supposent ou supposent f bornée pour résoudre la question. Cette question a été difficile pour un grand nombre de copies. Il fallait pouvoir justifier le calcul formel qui menait à la formule recherchée. Une vingtaine de copies utilisent un argument de probabilité mais peu de manière complètement rigoureuse ou correcte. En effet, il fallait traiter le cas où f est de signe quelconque. La convergence des produits infinis n'est pas au programme, mais cet aspect ne semble pas avoir perturbé les candidats.

5a. Il fallait utiliser la sommation établie à la question 2 en montrant la convergence de l'intégrale. Un trop grand nombre de copies se trompent en montrant que l'intégrale de 1 à x est bornée alors qu'il fallait montrer que l'intégrale est convergente.

5b. Une belle application des théorèmes du cours concernant la continuité des intégrales à paramètres. Il est nécessaire en revanche de bien vérifier chaque hypothèse et notamment de remarquer que la fonction qui a t associe le terme intégré est continue par morceaux. Un certain nombre de candidats ne majorent pas la fonction intégrée par une fonction indépendante de s.

5c. Il fallait montrer que la fonction sommatoire était bornée et appliquer le 4b pour tout $\alpha > 0$. Ceux qui l'ont utilisé directement pour $\alpha = 0$ n'ont eu que la moitié des points.

5d. Certains ont utilisé un résultat de comparaison de série et d'intégrale alors que d'autres ont vu le lien avec 4a et ont encadré la partie entière de t. Les deux démarches étaient valables même si la seconde solution était celle attendue.

II– Caractères modulo p.

Les questions 6, 7 et 8 permettaient de tester les connaissances de base sur les groupes. À la surprise des correcteurs, la question 7 a posé beaucoup de problèmes et a donné lieu à beaucoup d'erreurs même dans les bonnes copies. Les 3 dernières questions (9a, 9b et 10) n'ont été traitées que par certaines très bonnes copies (4 copies pour la 9b, 22 copies pour la 10). Elles récompensent les candidats capables de résoudre des questions non classiques.

6a. Il fallait comprendre la question en considérant que la restriction de χ à $\mathbb{N}^*$ était une fonction arithmétique telle que définie en début d'énoncé, puis distinguer les cas suivant que nm est premier à p ou pas.

6b. Compte tenu de la question 6a, on ne pouvait pas utiliser la complète multiplicativité de χ sur $\mathbb{Z}^*$. Il fallait soit la redémontrer soit préciser que la démonstration de 6a s'étendait aisément au cas de $\mathbb{Z}^*$.

6c. Alors que cette relation de convolution se démontrait en deux lignes, certains utilisent plusieurs pages pour tenter d'y répondre !

7a. Il fallait faire apparaître clairement le rôle de l'hypothèse s et t premiers entre eux, par exemple en indiquant que l'on utilisait le lemme de Gauss. Ceux qui ne l'ont pas fait n'ont pas eu les points.

7b. L'ajout « avec $\mathrm{pgcd}(s,t) = 1$ » était une erreur d'énoncé. De nombreux candidats l'ont compris. Cette question préparait la question 7c. Ceux qui ont résolu la question 7c sans utiliser cette question ont eu les points initialement prévus pour la question 7b. Cette question a été très peu bien traitée (80 copies) même parmi les bonnes copies. Elle a donné lieu à un nombre incroyable d'erreurs d'arithmétique du genre $s/\mathrm{pgcd(s,t)}$ et t sont premiers entre eux ou $\mathrm{ppcm}\big(s/\mathrm{pgcd(s,t)}, t/\mathrm{pgcd(s,t)}\big) = \mathrm{ppcm}(s,t)$. Pourtant quelques copies développent une solution simple et élégante très proche de la question 7a.

7c. Dans l'esprit du concepteur, il fallait utiliser le résultat de la 7b sans l'hypothèse $(s,t) = 1$. Certains élèves développent d'autres solutions. Ils n'ont naturellement pas été pénalisés.

7d. Visiblement, certains connaissaient une autre méthode pour démontrer le résultat en passant par la fonction φ d'Euler. Mais très peu ont su la rédiger complètement. La logique de l'énoncé voulait qu'on utilise le résultat du 7c pour cela.

8a. Cette question a été mieux traitée que la question 7. Sans doute a-t-elle été déjà traitée par certains élèves. Ainsi, nombreux sont ceux qui introduisent un isomorphisme entre $\widehat{G}$ et l'ensemble des racines $(p-1)$-ième de l'unité.

8b. Cette question a donné lieu à un certain nombre d'erreurs. En utilisant le fait que G était engendré par un élement h, on devait calculer la somme des $\chi^k(h)$ pour k variant de 0 à $p-2$. Beaucoup de copies pensent que les $\chi^k(h)$ décrivent toutes les racines $(p-1)$-èmes de l'unité, ce qui n'est pas vrai en général.

8c. Contrairement à ce que l'énoncé laissait supposer, il y avait 3 cas à considérer les cas n congru à c ou à 0 modulo p et les n qui ne sont congrus ni à c ni à 0 modulo p. Traiter uniquement le cas n congru à c ne donnait pas de points.

9a. Il y avait une imprécision d'énoncé qui a gêné quelques candidats : il fallait montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $T_{k,\varepsilon}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\tau_k(n) \leqslant T_{k,\varepsilon} n^{\varepsilon}$. Ce résultat se démontrait par récurrence sur k. Certaines copies affirment que la somme $\sum_{d|n} d^{-\varepsilon}$ est uniformément bornée ce qui n'est vrai que si l'on suppose $\varepsilon > 1$.

9b. C'est sans doute une des questions les plus difficiles du sujet. Elle nécessitait de prendre des initiatives et notamment de majorer la somme des $n^{-(k-1)/k}$ lorsque $n \leqslant x/y$. Une comparaison avec une intégrale permettait de le faire. L'optimisation en y a aussi posé des problèmes à ceux qui y ont réfléchi. Quatre copies arrivent à la résoudre. Bravo !

10. Cette question a été difficile pour beaucoup de candidats. En effet peu de copies ont vu que, pour pouvoir appliquer les résultats nécessitant une hypothèse de convergence absolue, il était nécessaire d'établir d'abord la relation $D_k(s,\chi) = L(s,\chi)^k$ pour $s > 1$, et ensuite seulement de faire tendre s vers 1 grâce à la première partie de la question.

III- Calculs autour de $D_k(1, f)$.

Cette partie-là demandait une certaine agilité calculatoire. Elle permettait de récompenser celles ou ceux capables de résoudre des questions en utilisant les questions précédentes.

11. Elle était facile et a été plutôt bien faite par ceux qui l'ont cherchée.

12. Pour résoudre cette question, il ne fallait pas sommer des séries qui divergeaient sous peine de n'avoir aucun point. Peu de candidats se sont souciés de ces questions de convergence

13. Les correcteurs ont été surpris par le peu de candidats capables de mener à bien les calculs (3%). Visiblement relier la question au calcul de la somme $\sum_{k=0}^{p-1} kx^k$ a été difficile pour de nombreuses copies alors que le résultat recherché était indiqué dans l'énoncé.

14a. Il fallait distinguer le cas $p \mid n$ du cas $p \nmid n$. Cette question a été plutôt bien traitée par ceux qui l'ont cherchée.

14b. Beaucoup se trompent en écrivant $\sum_{n=1}^{p} |\tau(\chi, n)|^2 = p|\tau(\chi)|^2$ alors que $\sum_{n=1}^{p} |\tau(\chi, n)|^2 = (p-1)|\tau(\chi)|^2$, car ils oublient que $\chi(p) = 0$.

14c. L'énoncé oubliait de préciser que χ devait être impair. Une dizaine de copies rajoutent cette hypothèse et résolvent la question.

15. Cette question a été plutôt bien traitée (93 copies l'ont réussie) par ceux qui l'ont cherchée.

16. Là encore il ne fallait pas sommer des séries qui divergeaient sous peine de n'avoir aucun point. Seules 7 copies l'ont réussi.

17. Il fallait commencer par remarquer que les séries de Dirichlet manipulées étaient absolument convergentes grâce à la question 9a.

18. Une des questions les plus difficiles ! Elle a été cherchée et réussie par une seule copie.

IV– Un peu d'algèbre linéaire ...

Le début reposait sur des résultats concernant les extensions finies de corps. Il était suivi par des questions difficiles menant à la résolution du problème. Hormis une dizaine de copies, les candidats n'ont pas cherché les questions au-delà de la question 22.

19a. Cette question n'a pas toujours été bien traitée. Certains n'arrivent pas à montrer rigoureusement que $Q[\alpha]$ est bien un espace vectoriel. Ils montrent que la famille $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}\}$ est libre avec d le degré du polynôme minimal, et en déduisent que la dimension est d sans préciser pourquoi cette famille est aussi génératrice.

19b. Là encore, de nombreuses copies n'arrivent pas à montrer rigoureusement que la multiplication par x induit un endomorphisme de $\mathbb{Q}[\alpha]$, ou disent que c'est évident et s'en dispensent. Ils perdent de précieux points.

19c. Question facile utile pour la suite.

20a. Beaucoup de personnes n'arrivent pas à calculer les coefficients de $P_p(X+1)$ alors qu'il suffisait d'utiliser le calcul d'une série géométrique.

20b. Plutôt bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

20c. Une des questions les plus difficiles pour les candidats. Il fallait montrer que si $Q_1(\xi_p) = Q_2(\xi_p)$, alors $Q_1(\xi_p^c) = Q_2(\xi_p^c)$ pour c premier à p. Beaucoup de bonnes copies ne voient pas cette subtilité. On pouvait passer par le reste de la division euclidienne de P par P_p, mais alors les propriétés de morphisme devaient être traitées avec soin.

20d. Facile compte tenu de la 20c.

21a. Un certain nombre de personnes se trompent en confondant $e(1/2p)$ et ξ_p.

21b. Des erreurs liées à la confusion du 21a.

22a. Il fallait notamment utiliser que $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \bmod p$. Seules quelques copies ont cherché cette question : 27 pour 2 bonnes réponses.

22b. Pour les rares qui ont eu l'endurance d'arriver jusque là, il fallait utiliser $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \bmod p$. Trois copies sont parvenu à la résoudre.

23a. La majorité des bonnes copies qui ont abordé cette question ont eu du mal à calculer ce déterminant. Il fallait remarquer ensuite que $(-1)^{m(m-1)/2} = \cos(\frac{1}{2}\pi m) + \sin(\frac{1}{2}\pi m)$ pour tout m entier.

23b. Un simple calcul.

23c. Un calcul très peu abordé qui demandait de remarquer que $(-1)^{\ell} = -1$ puisque ℓ est impair.

23d. Il fallait démontrer l'indépendance de la famille des c_{ℓ}.

24a et **24b**. Il s'agissait de rassembler un certain nombre de résultats. Questions très peu abordées (moins de 5 copies).

25. Cette question n'était pas le point culminant du sujet, mais permettait de montrer la relation $L(1,\chi) \neq 0$ pour les $p \equiv 3 \bmod 4$. Un argument de congruence modulo 2 suffisait. Une copie l'a abordée et l'a correctement traitée.