

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

**Concours d'admission session 2020**

**Filière universitaire : Second concours**

**COMPOSITION DE PHYSIQUE**

Durée : 3 heures

*L'usage de calculatrices électroniques de poche à fonctionnement autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé.*

\* \* \*

Ce sujet comprend deux parties indépendantes. La première est un court questionnaire de connaissance générale. La seconde propose l'étude d'un problème.

## Partie A – Questionnaire de physique

On formulera les réponses aux questions de façon claire, précise et concise. Il n'est pas attendu de justification des  
5 réponses données ni de définition des éventuelles notations utilisées ou grandeurs introduites.

1. Représenter un montage d'optique permettant d'observer des interférences sur un écran, avec le dispositif des trous d'YOUNG.
2. Dessiner l'allure de la figure d'interférence alors obtenue.
3. Donner l'expression traduisant la loi de STEFAN concernant le rayonnement thermique.
- 10 4. Représenter l'allure graphique de la dépendance, avec le nombre de REYNOLDS, du coefficient de traînée d'une sphère en mouvement, à vitesse constante, dans un fluide.
5. Donner l'expression du vecteur de POYNTING en électromagnétisme (dans le vide).
6. Proposer un exemple concret d'un milieu dispersif.
7. Indiquer ce que représente une fonction d'onde.
- 15 8. Donner l'expression du moment cinétique d'un point matériel  $M(m)$  par rapport à un point P.
9. Indiquer ce que représente l'enthalpie de vaporisation de l'eau.
10. Préciser son signe et indiquer son ordre de grandeur.

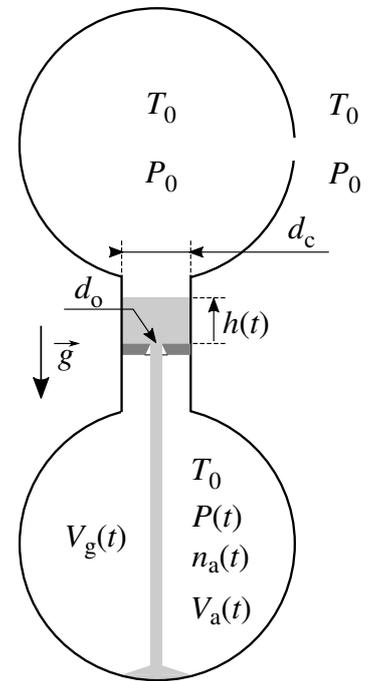
## Partie B – Étude d'un sablier à écoulement intermittent

L'écoulement du sable dans un sablier peut, sous certaines conditions, devenir intermittent. Cet effet est dû au couplage, *via* les bulbes du sablier, entre l'écoulement de l'air à travers le milieu granulaire (le sable) et celui de ce dernier à travers le col du sablier. Dans cette situation, la vidange du ballon supérieur dans le ballon inférieur se produit par avalanches successives. C'est ce phénomène que nous nous proposons d'étudier.

Le sablier que nous considérons est représenté sur la figure ci-dessous. Il est constitué de deux bulbes (ou ballons) sphériques rigides de volume  $V$  chacun, reliés par un conduit cylindrique de diamètre  $d_c$ . Un diaphragme, percé d'un orifice circulaire de diamètre  $d_o$ , est placé au milieu du conduit et constitue le col du sablier. La sable occupe une hauteur  $h(t)$  de ce conduit,  $h(0)$  étant inférieure à la demi-longueur du conduit. La paroi du ballon supérieur comporte un orifice donnant sur l'extérieur ce qui nous permet de considérer que sa pression demeure toujours égale à la pression atmosphérique  $P_0$ .

□ Notations et valeurs numériques adoptées.

- $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  : accélération de la pesanteur.
- $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  : constante des gaz parfaits.
- $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$  : pression atmosphérique.
- $T_0 = 300 \text{ K}$  : température de l'air.
- $v_m = 22,4 \text{ L}\cdot\text{mol}^{-1}$  : volume molaire de l'air à  $P_0$  et  $T_0$ .
- $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  : viscosité dynamique de l'air à  $P_0$  et  $T_0$ .
- $m = 10 \text{ g}$  : masse totale du sable.
- $\rho_s = 1,5 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  : masse volumique du sable.
- $\rho_g = 2,5 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  : masse volumique des grains.
- $d = 50 \mu\text{m}$  : diamètre caractéristique des grains de sable.
- $d_o = 1 \text{ mm}$  : diamètre de l'orifice d'écoulement (col du sablier).
- $d_c = 1 \text{ cm}$  : diamètre du conduit.
- $V = 0,1 \text{ L}$  : volume de chacun des ballons.
- $V_g(t) = m_g(t)/\rho_g$  : volume (net) occupé par les grains dans le ballon inférieur.
- $V_a(t)$  : volume occupé par l'air dans le ballon inférieur.
- $n_a(t)$  : nombre de moles d'air dans le ballon inférieur.
- $P(t)$  : pression de l'air dans le ballon inférieur.
- $\delta P(t) = P(t) - P_0$  : surpression dans le ballon inférieur.



□ Cadre de l'étude.

- Le volume du conduit, et donc également le volume total de sable, sont négligeables devant le volume  $V$ .
- L'air est assimilé à un gaz parfait.
- À tout instant, l'air dans chacun des ballons est à l'équilibre thermodynamique.
- La température de l'air dans chacun des ballons reste uniforme, constante et égale à  $T_0$ .
- La surpression  $\delta P$  reste faible relativement à  $P_0$ .

**Par ailleurs, nous limiterons les calculs au premier ordre par rapport à la composante variable de chacune des grandeurs dépendant du temps.**

### 1 Considérations préliminaires.

La figure (1) représente qualitativement l'évolution temporelle du volume  $V_g$  de grains et celle de la pression  $P$  de l'air, dans le ballon inférieur, lorsque le phénomène d'intermittence est établi. Il y apparaît une succession de phases

actives pendant lesquelles le volume  $V_g$  croît et de phases passives pendant lesquelles il reste constant. Pendant une phase active, l'écoulement du sable dans le ballon inférieur fait croître la pression de l'air. Lorsque cette pression atteint une valeur de seuil supérieur  $P_{\max}$ , la différence de pression de part et d'autre de la colonne de sable devient suffisante pour la stabiliser faisant ainsi cesser l'écoulement des grains. Pendant une phase passive, l'écoulement de l'air à travers le sable entraîne la décroissance de la pression dans le ballon inférieur. Cette pression diminue jusqu'à atteindre une valeur de seuil inférieur  $P_{\min}$  pour laquelle l'écoulement granulaire réapparaît. Nous notons  $T_A$  et  $T_P$  les durées respectives d'une phase active et d'une phase passive et  $T = T_A + T_P$ .

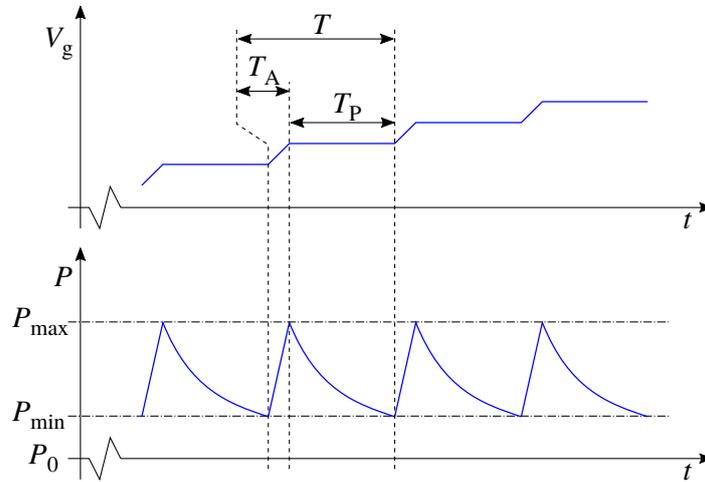


FIGURE 1 – Illustration de l'évolution temporelle du volume  $V_g$  de grains et celle de la pression  $P$  de l'air dans le ballon inférieur lorsque le phénomène d'intermittence est établi.

□ Nous considérerons que :

- $T_A \ll T_P$  et donc que  $T \simeq T_P$  ;
  - les pressions  $P_{\min}$  et  $P_{\max}$  restent constantes pendant toute la durée nécessaire au déversement complet de la colonne de sable.
1. En considérant que le sable se comporte mécaniquement comme un liquide, exprimer la surpression  $\delta P^*$  de l'air dans le ballon inférieur qui serait nécessaire au maintien à l'équilibre de la colonne de sable dans le conduit (à  $t = 0$ ).
  2. Calculer la valeur numérique de la surpression  $\delta P^*$ .
  3. Exprimer la variation relative, en pourcentage, du volume d'air dans le ballon inférieur qui correspondrait à cette surpression. Nous notons  $X\%$  cette grandeur.
  4. Calculer la valeur de  $X\%$ . Si l'on se fie à cette valeur, peut-on espérer observer le phénomène d'intermittence décrit dans l'introduction de cette partie ?

## 2 Étude de la phase active.

Il s'agit d'étudier la phase durant laquelle le sable s'écoule par l'orifice constituant le col du sablier faisant ainsi croître la pression dans le ballon inférieur. Nous notons  $Q_g$  le débit volumique (net) de sable s'écoulant à travers l'orifice formant le col du sablier. Précisons que ce débit est relié au volume net occupé par les grains de sable dans le ballon inférieur par la relation ;

$$Q_g = \frac{dV_g}{dt} \quad (1)$$

5. Indiquer la forme que prendrait l'expression du débit  $Q_g$  si le sable se comportait comme de l'eau (en négligeant tout effet dissipatif et éventuel effet de tension de surface).

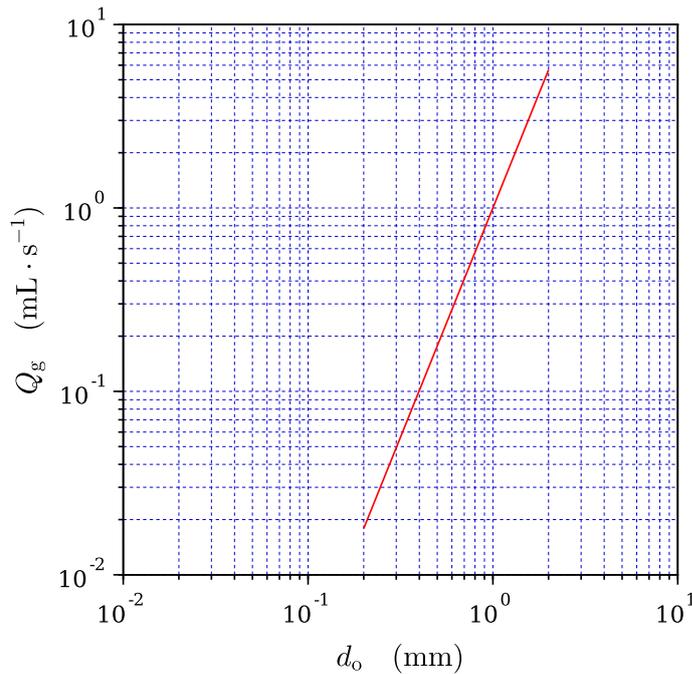


FIGURE 2 – Dépendance du débit volumique (net)  $Q_g$  de grains avec le diamètre  $d_o$  de l’orifice (coordonnées log-log).

6. Une expérience<sup>1</sup>, réalisée avec des grains de diamètre caractéristique  $d = 50 \mu\text{m}$ , a permis d’établir que le débit  $Q_g$  est constant et qu’il dépend du diamètre  $d_o$  de l’orifice comme le représente la figure (2).

Sur la base de ce tracé, déterminer l’expression empirique de la fonction reliant le débit  $Q_g$  au diamètre  $d_o$  (dans le système d’unités international).

7. Indiquer de quelle grandeur, autre que le diamètre  $d_o$ , le débit  $Q_g$  dépend nécessairement. On précisera la dépendance correspondante.

8. Contrairement à un liquide (habituel), le débit de grains est indépendant de la hauteur de sable surmontant l’orifice par lequel il s’écoule. Indiquer où cette différence remarquable trouve son origine.

9. Justifier que nous pouvons considérer que le nombre  $n_a$  de moles d’air dans le ballon inférieur reste constant pendant chaque phase active.

10. Exprimer la variation du volume d’air dans la ballon inférieur au cours d’une phase active. On prendra comme origine du temps le début de cette phase.

11. Établir, qu’au cours de la phase active, la pression évolue selon la relation (nous rappelons que les calculs sont conduits au premier ordre par rapport aux composantes variables) :

$$P(t) = P_{\min} (1 + t/\tau_A) \quad (2)$$

où  $\tau_A$  est une constante positive (et indépendante de la phase active considérée) que l’on exprimera en fonction de  $V$  et  $Q_g$  et dont on donnera la valeur.

12. Exprimer le rapport  $k_A = T_A/\tau_A$  en fonction du rapport  $P_{\max}/P_{\min}$ .

• Les seuils de pression prennent les valeurs :

$$\begin{cases} P_{\min} = P_0 (1 + 10^{-4}) \\ P_{\max} = P_0 (1 + 10^{-3}) \end{cases} \quad (3)$$

1. Une balance, placée sous un orifice pratiqué dans le fond d’un récipient cylindrique et duquel s’écoulent les grains de sable, permet de suivre l’évolution temporelle de la masse de grains recueillie.

13. Commenter, au vu de ces valeurs, la valeur de la surpression  $\delta P^*$  calculée en réponse à la question (2).

80 14. Calculer la valeur numérique du rapport  $k_A$  puis celle de la durée  $T_A$  d'une phase active, correspondant à ces seuils.

15. Exprimer, en fonction de  $k_A$  et  $V$ , le volume (net)  $\Delta V_g$  de grains écoulé durant une phase active.

85 16. Le facteur de compacité  $\Phi$  ( $0 < \Phi < 1$ ) du milieu granulaire est défini par le rapport du volume effectivement occupé par les grains (volume net) au volume apparent occupé par le sable. Exprimer ce facteur en fonction des grandeurs introduites dans la présentation puis calculer sa valeur.

17. Nous numérotions les avalanches par un nombre entier naturel  $n$ . Établir que la hauteur  $h_n$  de grains restant dans le conduit du sablier, en fin de la  $n$ -ième avalanche, s'exprime par la relation :

$$h_n = h_0(1 - \alpha n) \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (4)$$

où  $\alpha$  est une constante positive que l'on exprimera en fonction du produit  $k_A V$  et du rapport  $\rho_g/m$ .

18. Calculer la valeur de la hauteur  $h_0$  et celle du coefficient  $\alpha$ . Préciser le nombre  $n^*$  d'avalanches observables.

### 3 Étude de la phase passive.

Lors d'une phase passive le sable ne s'écoule pas et de l'air transite, à travers la colonne de sable, du ballon inférieur au ballon supérieur. La hauteur  $h$  de sable dans le conduit, et par conséquent le volume  $V_g$  de sable occupant le ballon inférieur, demeurent constants. Sous la différence de pression  $\delta P$  entre les deux ballons l'air s'écoule de bas en haut à travers le milieu granulaire contenu dans le cylindre de liaison. Dans ces conditions, le débit volumique  $Q_a$  de l'air traversant la colonne granulaire est donné par la relation de DARCY (en considérant que l'influence de l'orifice sur le débit est dominée par celle de la colonne granulaire) :

$$Q_a = \frac{\delta P}{R_a} \quad (\text{compté positivement de bas en haut}) \quad (5)$$

90 Le facteur  $R_a$ , positif et constant durant chaque phase passive, caractérise la résistance aérodynamique qu'oppose la colonne de grains à l'écoulement d'air qui la traverse.

L'origine du temps est ici choisie au début de la phase passive considérée.

19. Proposer une analogie de la loi de DARCY dans un autre domaine de la physique.

95 • Le facteur  $R_a$  est une grandeur qui dépend de paramètres géométriques extensifs et d'un paramètre intensif  $\rho_a$  que nous appellerons résistivité aérodynamique. Ce paramètre caractérise la propriété du milieu granulaire, indépendamment de ses dimensions, à s'opposer à l'écoulement d'air le traversant. La résistivité  $\rho_a$  dépend des propriétés intrinsèques suivantes du milieu et de l'air :

- le diamètre  $d$  des grains ;
- le facteur de compacité  $\Phi$  du milieu, défini dans la question (16) ;
- la viscosité dynamique de l'air  $\eta$ .

100 20. En indiquant le raisonnement conduit, proposer une relation liant  $R_a$  à  $\rho_a$ ,  $h$  et  $d_c$ .

21. Par analyse dimensionnelle, déterminer la forme de la relation liant  $\rho_a$  à  $\eta$  et  $d$ .

22. La relation liant  $\rho_a$  à  $\eta$  et  $d$  comporte un préfacteur  $S$ , sans dimension, fonction du facteur de compacité  $\Phi$ . Il s'exprime :

$$S = \left( \frac{6\Phi}{1-\Phi} \right)^2 \quad (6)$$

Esquisser l'allure graphique de la dépendance de  $\rho_a$  avec le facteur de compacité  $\Phi$ . Commenter brièvement cette dépendance.

23. Déterminer la valeur du préfacteur  $S$  correspondant au sable utilisé.

24. Établir que le débit volumique d'air à travers la colonne de sable est relié au nombre de moles d'air dans le ballon inférieur par la relation :

$$Q_a = -v_m \frac{dn_a}{dt} \quad (7)$$

- 105 25. Établir l'équation différentielle dont l'écart de pression  $\delta P$  est solution. On introduira un temps caractéristique  $\tau_P$ .
26. En déduire l'expression de la fonction  $\delta P = \delta P(t)$ .
27. Exprimer le rapport  $k_P = T_P/\tau_P$  en fonction du rapport  $\delta P_{\max}/\delta P_{\min}$ . Nous rappelons que  $T_P$  représente la durée d'une phase passive.
- 110 28. Calculer la valeur  $T_{P0}$  de  $T_P$  pour  $h = h_0$  (hauteur calculée en réponse à la question (18)). La comparer à celle de  $T_A$ .

#### 4 Vidange du sablier.

Nous avons établi (équation (4)) que la hauteur de sable dans le conduit, suite à la  $n$ -ième avalanche, est donnée par la relation :

$$h_n = h_0(1 - \alpha n) \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (8)$$

D'autre part, il est apparu que la durée  $T_n$  de la séquence correspondant à la  $n$ -ième avalanche (c'est-à-dire la  $n$ -ième phase active) et de la phase passive qui lui succède s'exprime :

$$T_n = T_A + T_{Pn} = T_A + \beta h_n \quad (9)$$

Le figure (3) illustre la mise en correspondance de ces deux résultats.

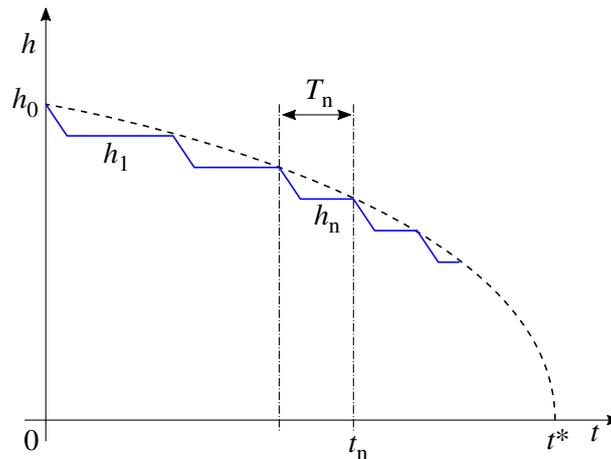


FIGURE 3 – Aspect de l'évolution de la hauteur de sable dans le conduit en fonction du temps. La courbe en trait pointillé représente l'enveloppe de cette évolution.

29. Rappeler brièvement pourquoi la durée  $T_{Pn}$  est proportionnelle à  $h_n$ .
- 115 30. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'enveloppe  $H = H(t)$  représentée en trait pointillé sur la figure (3).
31. Intégrer cette équation différentielle. Il n'est pas utile d'en extraire la forme explicite de la fonction  $H = H(t)$ .
32. Exprimer la durée  $t^*$  nécessaire à l'écoulement complet du sable. Calculer sa valeur. Commenter ce résultat.
33. Préciser comment serait modifiée chacune des durées  $T_A$  et  $T_P$  si le ballon supérieur ne comportait pas de trou donnant sur l'extérieur. Une argumentation est attendue.