Banque MP inter-ENS – Session 2020
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

- **Écoles partageant cette épreuve :**
  ENS Lyon, Paris-Saclay, Rennes et Ulm

- **Coefficients (en % du total concours) :**
  — Lyon : MP & MPI 27,6 % ; Info M 25,8 %
  — Paris-Saclay : MP 31,9 %, MPI 27,7 % ; Info 26,3 %
  — Rennes : MP & MPI 26,3 % ; Info 10 %
  — Ulm : MP 21,6 % ; Info 27,6 %

- **Membres du jury :**
  Pascal Boyer, Alain Durmus, Aurélien Galateau, Pierre Lissy, Hatem Zaag (correcteurs) et Thibaut Deheuvels (concepteur et correcteur)

Présentation générale

Le sujet Math C 2020 traitait de quelques résultats classiques d'analyse et d'optimisation convexe. Plus précisément, il invitait le candidat à montrer quelques caractérisations d'une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$, prouver l'existence et l'unicité d'un minimum global sur un convexe fermé $K \subset \mathbb{R}^n$, analyser une méthode de pénalisation ou encore étudier l'algorithme d'Uzawa.

L'épreuve a permis de tester l'aisance des candidats à manipuler les techniques et les outils classiques d'analyse au programme des classes préparatoires : topologie, calcul différentiel, analyse réelle. Il fallait aussi mobiliser quelques notions élémentaires d'algèbre linéaire.

Les notes se sont étalées de 0 à 20, avec une moyenne de 9,03 et un écart-type de 3,81. Le jury souhaite rappeler qu'il attend des candidats clarté, précision et rigueur, et ceci même sur les questions les plus élémentaires. Il n'a pas hésité à sanctionner fortement les réponses manquant de justifications convaincantes. La présentation entre aussi pour une part importante dans l'appréciation d'une copie. Les abréviations sont à proscrire et les résultats obtenus doivent être mis en évidence.

De l'avis du jury, le problème proposé était relativement long mais d'une difficulté abordable, quelques questions dans les deux dernières parties étant plus ardues. Aucune copie n'est parvenue à résoudre entièrement le sujet, mais une poignée de candidats d'excellent niveau sont parvenus à traiter en quasi totalité les parties 1, 2 et 3. La dernière partie n'a été abordée que dans un très petit nombre de copies.

Le jury a constaté que nombre de candidats ne semblent pas à l'aise avec des raisonnement élémentaires sur les fonctions réelles convexes et continues, les suites, les fonctions à plusieurs variables. En outre, les notions essentielles de topologie sont souvent mal maîtrisées. Le nombre moyen de questions abordées étant assez faible, le barème a été adapté en conséquence. Répondre correctement aux questions de la première partie permettait déjà d'atteindre une note supérieure à la moyenne. Si, en plus, on arrivait à traiter parfaitement la deuxième partie, on pouvait obtenir une excellente note. Aborder avec succès deux tiers des questions de la troisième partie assurait alors d'avoir la note maximale.

Le jury souhaite rappeler aux candidats qu'ils ne peuvent pas espérer obtenir une bonne note s'ils se cantonnent aux questions les plus simples. Ceux qui ont pris ce parti n'ont guère été récompensés.

Partie I

La première partie du sujet rassemblait des préliminaires sur les fonctions convexes à plusieurs variables : caractérisations, convexité forte, cône admissible, conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Elle a été abordée par la majorité des candidats, mais de façon inégale. Le jury a ici été très pointilleux sur l'argumentation et les raisonnements des postulants, et il a lourdement sanctionné les réponses imprécises ou incomplètes.

La question I-1.a) a été en général bien traitée.

Dans la question I-1.b), le jury a été particulièrement attentif au niveau de compréhension de la notion de différentielle et de gradient par les candidats. Il n'a pas hésité à sanctionner les raisonnements trop rapides ou trop vagues.

Dans la question I-1.c), le sens direct a été en général bien montré, mais le sens réciproque a posé beaucoup de difficultés à un certain nombre de candidats.

Dans la question I-1.d), le jury a été étonné de constater que certains candidats semblent penser que

$$(a_1 \leqslant a_2 \text{ et } a_3 \leqslant a_4) \Leftrightarrow a_1 + a_2 \leqslant a_3 + a_4.$$

Comme pour la question précédente, il était plus sûr de ne pas chercher à raisonner par équivalence.

Les questions I-2 et I-3 ont été en général correctement traitées, sauf dans les copies les plus faibles.

La question I-4 a été nettement plus discriminante, et le jury a été particulièrement attentif à la rédaction. D'abord, pour se ramener à un ensemble compact **non vide**, il fallait bien choisir M dans la définition de la coercivité (et ne pas se contenter de prendre, par exemple, $M = 1$ ou encore $M = f(0)$ puisqu'il n'y a aucune raison que 0 soit dans K). D'autre part, on peut a priori avoir : $\inf_{x \in K} f(x) = -\infty$, ce qu'un certain nombre de candidats semblent ne pas avoir remarqué.

La question I-5 a été en général mal traitée par les candidats, que ce soit pour la partie existence – où une preuve de la coercivité de f était attendue – ou pour la partie unicité. À toutes fins utiles, le jury rappelle que le théorème célèbre affirmant qu'un extremum d'une fonction f à valeurs réelles et différentiable vérifie $\nabla f = 0$ est valable si f est définie sur un **ouvert** de $\mathbb{R}^n$.

La question I-6.a) pouvait être résolue de différentes façons. Le jury a particulièrement apprécié les candidats qui ont remarqué que l'application $y \in C \mapsto \|y - x\|^2$ était 2-convexe, ou ceux qui ont utilisé le caractère coercif de $y \in C \mapsto \|y - x\|$. Les questions I-6.b) et I-6.c), relativement classiques, ont posé beaucoup de difficultés malgré les indications.

La question 7 a été très souvent correctement traitée. Attention toutefois, il n'est pas possible de diviser par $\|h\|$ si $h = 0$ dans $\mathbb{R}^n$ et par $k \in \mathbb{N}$ si $k = 0$. Le jury a sanctionné les candidats qui utilisaient sans le remarquer explicitement que la définition du cône K-admissible était inchangée si on considérait des suites seulement définies à partir d'un certain rang.

La plupart des candidats ayant abordé la question 8 ont souvent manqué de précision, en particulier dans l'application du développement de Taylor.

Partie II

La deuxième partie du sujet présentait une méthode de pénalisation permettant d'approcher le minimum d'une fonction sous des contraintes données par certaines fonctions convexes. Cette partie était très abordable et a été largement traitée. Une grande partie des candidats se sont toutefois contentés de traiter les questions les plus simples.

Les questions II-1 et II-2 n'ont pas posé de problème particulier.

La question II-3 a dans l'ensemble eu peu de succès au delà du résultat suggéré dans l'indication. Il s'agissait de montrer d'abord la convexité de la fonction Ψ, puis la forte convexité de f_k, pour tout entier k. La différentiabilité de f_k était nécessaire pour appliquer le résultat de la question I-5, ce que la majorité des candidats n'ont pas vu.

La question II-4 ne présentait pas de difficulté et a été généralement bien traitée.

La question II-5.a) était un peu plus difficile. De nombreux candidats ont souhaité utiliser la question II-2 pour montrer que si $\bar{x} \notin K$, alors $\lim_{k \to +\infty} f_k(x_k) = +\infty$, ce qu'on ne peut pas déduire directement. Par ailleurs, beaucoup ont admis sans démonstration la convergence de la suite $(f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$, ce qui a été sévèrement sanctionné. La question II-5.b) a été beaucoup mieux réussie.

La question II-6 a souvent été abordée, mais plus rarement de manière satisfaisante. On rappelle qu'une suite qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence ne converge pas nécessairement. Il s'agissait d'utiliser la coercivité pour montrer que la suite considérée était bornée.

La question II-7 pouvait être résolue presque immédiatement en exploitant l'encadrement : $f(x_k) \leqslant f_k(x_k) \leqslant f(x^\star)$, ce qu'un certain nombre de candidats ont bien remarqué. D'autres rédactions étaient bien sûr valables.

Partie III

La troisième partie proposait de démontrer le théorème de Karush-Kuhn-Tucker, qui fournit une condition nécessaire d'optimalité pour des problèmes d'optimisation sous contraintes. La preuve repose sur le lemme de Farkas, que le sujet proposait de démontrer au préalable. À nouveau, le jury regrette que de trop nombreuses copies n'aient pas abordé les questions plus délicates et l'a pris en compte dans sa notation.

La question III-1.a) ne présentait aucune difficulté et a été correctement traitée par un très grand nombre de candidats.

Dans la question III-1.b), de nombreuses copies introduisent une suite convergente de C et déduisent directement la convergence coordonnée par coordonnée, parfois même sans relier ce résultat à la liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_m)$. Les candidats ayant omis de justifier la convergence ont été sanctionnés.

La question III-1.c) était beaucoup plus discriminante, et elle n'a été correctement traitée que dans quelques copies. Dans le cas où la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ n'est pas libre, il ne suffisait bien sûr pas de considérer une sous-famille libre, car on ne pouvait alors plus garantir que les coordonnées restent positives.

Dans la question III-2.a), l'inégalité $\langle p_C(v), p_C(v) - v \rangle \leqslant 0$ a souvent été déduite de la question I-6.b). L'autre inégalité a posé plus de problèmes. Certains candidats ont su exploiter que $2p_C(v) \in C$, et d'autres rédactions tout aussi valables ont été proposées.

La question III-2.b), très accessible, a été beaucoup mieux réussie, et en particulier la première partie. La seconde, qu'on peut aisément déduire de la question I-6.b), a parfois été laissée de côté.

La question III-3, assez simple, a pourtant tendu un piège à de nombreux candidats, qui se sont contentés de récapituler le résultat $\neg(i) \Rightarrow (ii)$ obtenu dans les questions précédentes, et ont omis de montrer que les assertions s'excluaient mutuellement.

La question III-4 pouvait être traitée directement ou en utilisant la question I-8. Elle n'a été abordée que par peu de candidats.

Les questions 5 à 8 ont été explorées par un petit nombre de candidats. La question 5 demandait un soin particulier pour construire les suites $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ce qui a été insuffisamment fait. Bien qu'accessible, la question 6 n'a presque pas été abordée. La question 7 demandait d'appliquer le lemme de Farkas aux vecteurs $\nabla f(x^\star)$ et $\nabla g_i(x^\star)$, $i \in I_{x^\star}$. Peu de candidats l'ont vu et ont su mener le raisonnement jusqu'au bout. La question 8, qui était une réciproque du théorème dans le cas convexe, a également posé des problèmes aux rares candidats qui l'ont abordée. Il s'agissait de se ramener à la minimisation de la fonction $x \mapsto f(x) + \sum_i g_i(x)$, convexe également.

Partie IV

La quatrième partie s'intéressait à l'étude du problème dual associé au problème d'optimisation convexe, et à la méthode d'Uzawa pour l'approximation de minimiseurs sous contraintes affines. Elle n'a été abordée que par 8% des candidats, qui pour la plupart se sont contentés de traiter la première question.

⋆ ⋆
⋆