

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Concours d'admission session 2021

Filière universitaire : Second concours

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à fonctionnement autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé.

★ ★ ★

Ce sujet comprend deux parties indépendantes. La première propose un questionnaire de connaissance générale en physique et la seconde l'étude d'un problème.

Partie A – Questionnaire de physique

On formulera les réponses aux questions de façon claire, précise et concise. Il n'est pas attendu de justification des réponses données ni de définition des notations introduites.

1. Illustrer, par un schéma, le principe de la construction de l'image d'un objet par une lentille mince convergente. On se placera dans la situation où la lentille est utilisée comme une loupe.
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique emmagasinée par un ressort (dans l'approximation linéaire de son comportement).
- 10 3. Représenter un filtre mécanique passe-bas (en amplitude). On précisera où se situent ses entrée et sortie.
4. Définir le concept de référentiel galiléen.
5. Énoncer le théorème de GAUSS.
6. Donner la dimension d'un coefficient de viscosité dynamique.
- 15 7. Écrire l'équation de MAXWELL-AMPÈRE (dans le vide).
8. Décrire (brièvement) le phénomène désigné par "effet de peau".
9. Écrire "l'équation de la chaleur".
10. Définir une "année-lumière".

Partie B – Étude de la propagation d’une onde acoustique dans un tube

20 Nous nous proposons d’étudier l’influence des conditions aux limites sur les propriétés d’une onde acoustique plane et harmonique se propageant dans un tube rigide.

Le milieu propagatif considéré est de l’air. Son état non perturbé, ou état de référence, est caractérisé par sa pression P_0 ($P_0 = 10^5$ Pa), sa température T_0 ($T_0 = 300$ K) et sa masse volumique ρ_0 . L’air est considéré comme étant un gaz parfait et aucun effet dissipatif de l’énergie mécanique n’est pris en compte. 25 Par ailleurs, nous nous plaçons dans une situation telle que les évolutions thermodynamiques de l’air peuvent être considérées comme étant adiabatiques. Enfin, l’effet de la pesanteur n’est pas pris en compte.

La pression P , la masse volumique ρ et la vitesse $\vec{v}$ de l’air, au point $M(\vec{r})$ et à l’instant t , dans son état perturbé par une onde acoustique, sont écrites comme la superposition d’une composante statique (ou d’équilibre) et d’une composante dynamique, soit :

$$\begin{cases} P(\vec{r}, t) = P_0 + p_1(\vec{r}, t) & (P_0 \text{ est uniforme et constante}) \\ \rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t) & (\rho_0 \text{ est uniforme et constante}) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(\vec{r}, t) \end{cases} \quad (1)$$

Les grandeurs portant l’indice 1 caractérisent la perturbation de l’état thermodynamique de l’air produite par l’onde acoustique. Nous nous plaçons dans le cadre de l’approximation acoustique, ainsi, en particulier, $|p_1| \ll P_0$ et $|\rho_1| \ll \rho_0$.

30 □ Formulaire.

- Équation d’EULER :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{f} \quad \text{où } \vec{f} \text{ désigne une éventuelle force par unité de masse.} \quad (2)$$

- Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3)$$

1 Étude générale.

Il s’agit, dans cette partie, d’établir le système d’équations vérifié par les composantes $(p_1, \rho_1, \vec{v})$ de la perturbation acoustique, dans l’approximation linéaire. Sauf à la question (2), l’onde acoustique n’est, ici, pas considérée comme étant nécessairement plane ni harmonique.

- 35
1. Établir l’expression du coefficient de compressibilité isentropique χ_S de l’air, dans son état de référence (P_0, T_0) , en fonction de P_0 et du coefficient de LAPLACE γ de l’air. Proposer, en la justifiant, une valeur de γ puis calculer celle de $\chi_S = \chi_S(P_0, T_0)$.
 2. Établir à quelle condition, portant sur la vitesse, le terme non linéaire $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ peut être négligé devant le terme $\partial \vec{v} / \partial t$, dans l’équation (2). Il s’agit ici de raisonner à partir de grandeurs caractéristiques, 40 et en considérant que l’onde acoustique est harmonique et plane. Nous la caractériserons alors par sa pulsation ω , son vecteur d’onde $\vec{k}$ et le module v_m de l’amplitude de la vitesse $\vec{v}$.

□ Dans toute la suite nous considérerons que cette condition est tacitement vérifiée. Elle complète celles associées aux relations (1). Ensemble, elles définissent le cadre de l’approximation acoustique.

3. Dans ce cadre, écrire les équations (2) et (3) sous leur forme linéarisée.
4. Établir le bilan des inconnues intervenant dans ces équations linéarisées, ainsi que celui des relations qui les lient. Analyser et commenter cette situation.
5. En précisant, parmi les hypothèses adoptées, celles qui doivent être invoquées, établir la relation liant 45 ρ_1 à p_1 , indépendante des équations (2) et (3).

6. Établir finalement que la surpression acoustique p_1 vérifie l'équation suivante (équation de D'ALAMBERT) :

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

On donnera l'expression du paramètre c (choisi positif) ainsi que sa valeur numérique.

2 Propagation d'une onde plane harmonique dans un tube.

50 Nous nous intéressons aux propriétés d'une onde acoustique guidée par un tube rigide d'axe (Ox) , de diamètre d et de longueur L (se reporter à la figure (1)). Cette onde est excitée harmoniquement, à la pulsation ω , à l'entrée ($x = 0$) du tube, par un transducteur électro-acoustique. Sa sortie ($x = L$) est couplée à un système mécanique caractérisé par son impédance mécanique Z_m .

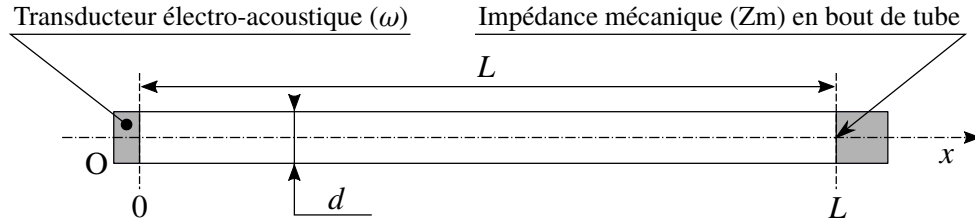


FIGURE 1 – Tube rigide d'axe (Ox) , de diamètre d et de longueur L , guidant une onde acoustique plane harmonique $(\omega, \vec{k} = k \vec{e}_x)$. Ce tube est couplé, à son entrée ($x = 0$), à un transducteur électro-acoustique et à sa sortie ($x = L$), à un système d'impédance mécanique Z_m .

Nous considérons que l'onde, dans le tube, présente la structure d'une onde plane longitudinale de vecteur d'onde $\vec{k} = k(\omega) \vec{e}_x$ et notons $\vec{v}(\vec{r}, t) = v(x, t) \vec{e}_x$. Les grandeurs harmoniques (p_1, ρ_1, v) sont alors recherchées, en représentation complexe, sous la forme générale :

$$\underline{X}(x, t) = A_X(i\omega) \exp \{i(\omega t - kx)\} \quad \text{où} \quad A_X \in \mathbb{C} \quad ; \quad \omega \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad k = k(\omega) \in \mathbb{R}^* \quad (5)$$

Par ailleurs, nous considérons que le transducteur électro-acoustique impose la vitesse de la perturbation à l'entrée du tube, ce que nous traduisons par la condition aux limites :

$$\underline{v}(0, t) = v_0 \exp \{i\omega t\} \quad \text{où} \quad v_0 = \text{Cste} \in \mathbb{R}_+ \quad (6)$$

Enfin, en régime harmonique, nous rappelons que l'impédance mécanique (ou acoustique) Z est définie par le rapport :

$$Z = \frac{p_1(x, t)}{v_1(x, t)} \quad (Z = Z(ikx) \in \mathbb{C}) \quad (7)$$

7. Justifier que, structurellement, l'équation (4) impose qu'à une pulsation ω soient associés deux nombres d'onde. Exprimer chacun d'eux.
8. Le résultat précédent nous conduit à rechercher la solution en vitesse de la perturbation sous la forme :

$$\underline{v} = A_v \exp \{i(\omega t - kx)\} + B_v \exp \{i(\omega t + kx)\} \quad \text{où} \quad A_v \in \mathbb{C} \quad ; \quad B_v \in \mathbb{C} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}_+^* \quad (8)$$

55 Les constantes complexes A_v et B_v sont, à ce stade, encore inconnues.

Exprimer la pression p_1 correspondante (en représentation complexe). On fera apparaître le paramètre $Z_i = \rho_0 c$.

9. Exprimer l'impédance mécanique (ou acoustique) Z , à l'abscisse x du tube.

10. Définir à quelles conditions, portant sur les constantes A_v et B_v , l'impédance Z devient indépendante de l'abscisse où elle est exprimée. Indiquer, pour chacune de ces conditions, son expression. Préciser à quelle situation chacun de ces cas correspond.
- 60

11. Dans le cas où le tube est “infini” (en pratique, de grande longueur devant la longueur caractéristique d’atténuation de l’onde), la constante B_v est nulle. Bien qu’aucun effet dissipatif n’ait été pris en compte, le transducteur électro-acoustique perçoit pourtant le tube comme un élément d’impédance purement réelle ($Z = Z_i$). Analyser et commenter ce paradoxe apparent.

• Le tube est couplé, à sa sortie ($x = L$), à un système d’impédance mécanique Z_m . Afin d’alléger l’écriture des équations nous posons :

$$\begin{cases} q = \exp(2ikL) \\ Z^* = Z_m/Z_i \\ R = q \frac{1 + Z^*}{1 - Z^*} \quad (\text{pour } Z^* \neq 1) \end{cases} \quad (9)$$

12. Exprimer les constantes A_v et B_v en fonction de v_0 et R .

13. Nous nous plaçons dans la situation où le tube est ouvert à son extrémité d’abscisse $x = L$ (c’est-à-dire qu’elle débouche directement dans le milieu atmosphérique). Nous considérons alors que $p_1(L, t) = 0$. Exprimer la vitesse $\underline{v} = \underline{v}(x, t)$ sur la base des paramètres v_0 , ω , k et L . Caractériser la nature de cette onde.

14. Indiquer pour quels nombres d’onde k_n et pulsations ω_n le tube ouvert entre en résonance acoustique. L’indice n ($n \in \mathbb{N}^*$) se rapporte au mode propre considéré. Nous choisissons cet indice tel que $n = 1$ corresponde au mode de plus basse fréquence.

Représenter l’allure graphique de la dépendance de l’amplitude de la vitesse avec l’abscisse x , pour les modes $n = 1$ et $n = 2$. Nous notons V_1^O et V_2^O ces amplitudes.

15. Nous nous plaçons dans la situation où le tube est fermé à son extrémité d’abscisse $x = L$ (c’est-à-dire que le tube est fermé par un bouchon indéformable). Exprimer la vitesse $\underline{v} = \underline{v}(x, t)$ sur la base des paramètres v_0 , ω , k et L . Caractériser la nature de cette onde.

16. Indiquer pour quels nombres d’onde k_n et pulsations ω_n le tube fermé entre en résonance acoustique (nous adoptons la même convention que celle présentée à la question (14)).

Représenter l’allure graphique de la dépendance de l’amplitude de la vitesse avec l’abscisse x , pour les modes $n = 1$ et $n = 2$. Nous notons V_1^F et V_2^F ces amplitudes.

17. Calculer les fréquences fondamentales ($n = 1$), f_1^O et f_1^F , de résonance d’un tuyau d’orgue d’une longueur de 5,28 m (33 “pieds de roi”), respectivement ouvert et fermé.

18. Nous excluons (du moins *a priori*) les situations particulières pour lesquelles le tube est ouvert, ou bien fermé (en $x = L$), que nous avons étudiées spécifiquement. Établir alors que l’amplitude de la vitesse (en particulier) ne diverge à la résonance que si l’impédance Z_m est purement imaginaire. Analyser et commenter ce résultat.

• Le système mécanique d’impédance Z_m , couplé au tube à son extrémité d’abscisse $x = L$, est une cavité de forme sphérique (rigide) de volume V et de diamètre D . C’est-à-dire que le tube débouche dans cette cavité. Le diamètre D est suffisamment grand devant le diamètre d du tube pour que l’on puisse considérer, si besoin, que le volume V reste sensiblement égal à $\pi D^3/6$.

19. Nous nous plaçons dans des conditions qui nous permettent de considérer que toutes les grandeurs thermodynamiques intensives décrivant l’état de l’air, dans la cavité, restent uniformes (elles ne dépendent alors que du temps). Préciser la condition que doit alors respecter la fréquence f de l’onde.

20. La figure (2) représente la cavité sphérique de volume V et de diamètre D à l’instant t . Elle contient alors la masse $m(t)$ d’air. À l’instant $t + dt$, elle contient la masse $m(t + dt) = m(t) + \delta m$. Pendant l’intervalle de temps dt , l’élément de masse (algébrique) δm , hors de la cavité à l’instant t , a transité du tube à la cavité, à travers la section d’abscisse $x = L$, sous l’effet d’une variation de pression à cette même abscisse.

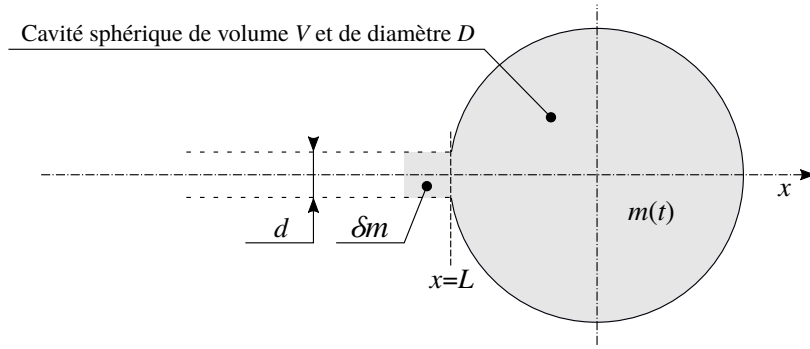


FIGURE 2 – Cavité sphérique de volume V et de diamètre D représentée à l'instant t . Entre les instants t et $t + dt$ sa masse a évolué de m à $m + \delta m$.

À partir d'un bilan de masse portant sur la cavité, entre les instants t et $t + dt$, établir que son impédance mécanique Z_m prend la forme :

$$Z_m = \frac{1}{i\omega G} \quad (10)$$

On exprimera la constante positive G en fonction du coefficient de compressibilité isentropique χ_S de l'air, du volume V de la cavité et de la section $s = \pi d^2/4$ du tube.

21. Sur la base du résultat établi en réponse à la question (18) (par exemple), établir l'équation implicite dont les pulsations de résonance du tube, couplé à la cavité, sont solutions.
22. Nous posons $K = kL$. Vérifier que cette équation implicite prend la forme :

$$\tan(K) = -\alpha K \quad (11)$$

105

On précisera l'expression de la constante réelle positive α dont on proposera une interprétation.

23. La figure (3) représente graphiquement la fonction $\theta \mapsto \tan(\theta)$ sur trois de ses périodes successives. Par ailleurs, nous adoptons la valeur $\alpha = 10$. Illustrer la résolution graphique de l'équation (11) (il faudra donc reproduire la figure (3)). Déterminer les valeurs approximatives des termes de la suite $K_n = k_n L$. Comme cela est indiqué à la question (14), l'indice n est le numéro du mode propre considéré.

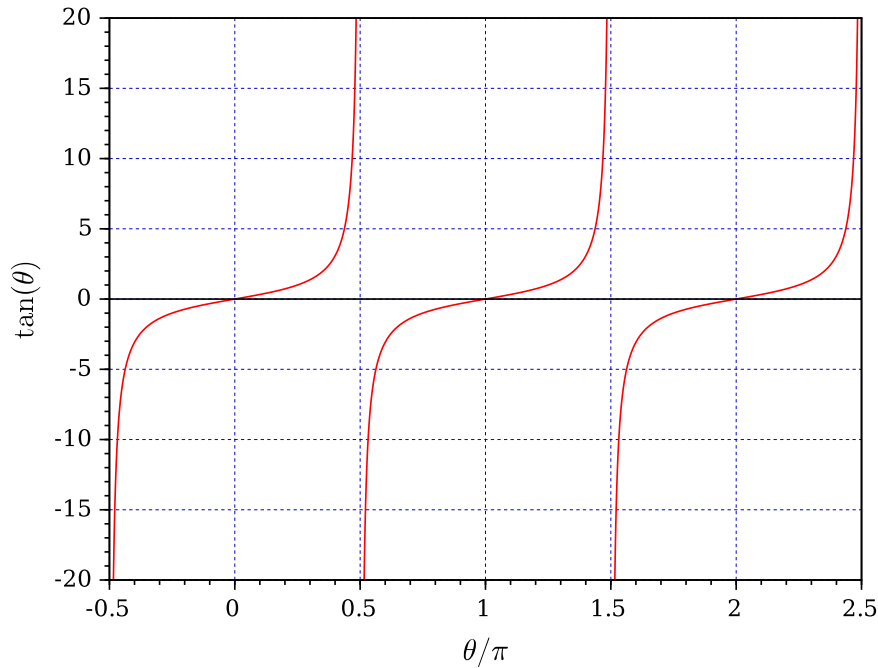


FIGURE 3 – Représentation graphique de la fonction $\theta \mapsto \tan(\theta)$, sur trois périodes.

- 110 **24.** Sur la base de l'illustration précédente, analyser et commenter le comportement résonant du tube
couplé à la cavité, d'une part selon la valeur du coefficient α , d'autre part selon celle de la fréquence.
- 25.** *Dans cette question, le problème est posé mais la démarche reste à construire. Il sera donc nécessaire
d'en présenter chacune des étapes.*

115 Nous n'avons considéré que l'aspect élastique du gaz contenu dans la cavité. Nous souhaitons ici
déterminer à quelle condition il se justifie de négliger la composante inertielle de son comportement
devant sa composante élastique.

Nous nous proposons de raisonner à partir de grandeurs caractéristiques que nous identifierons par
l'exposant " $\star$ ". Ainsi, la grandeur caractéristique se rapportant à la grandeur X sera écrite $X^\star$. Dans
cette approche de nature qualitative on ne fera intervenir aucun préfacteur numérique. Pour résumer,
120 par exemple, le volume V de la cavité sera représenté par le paramètre $V^\star = D^3$.

Établir à quelle condition, portant sur la pulsation, il devient justifiable de ne considérer que le com-
portement élastique du gaz contenu dans la cavité. Analyser et commenter ce résultat.

- 26.** Proposer une transposition, dans le domaine électrique, du système constitué du tube couplé, à son
entrée, au transducteur électro-acoustique et, à sa sortie, à la cavité.

125

★ ★
★